Łódź, 2022.05.04

dr hab. Paweł Caban, prof. UŁ
Katedra Fizyki Teoretycznej
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Łódzki

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Palasha Pandya
pt. *Application of chosen optimization algorithms for recognition of nonclassical effects.*

Rozprawa doktorska pana mgr. Palasha Pandya oparta jest o wyniki przedstawione w następujących pracach:

[1] Palash Pandya, Omer Sakarya, Marcin Wieśniak, "Hilbert-Schmidt distance and entanglement witnessing", Phys. Rev. A 102, 012409 (2020);

[2] Ekta Panwar, Palash Pandya, Marcin Wieśniak, "An elegant proof of self-testing for multipartite Bell inequalities", arXiv: 2202.06908 [quant-ph], (2022);

[3] Marcin Wieśniak, Palash Pandya, Omer Sakarya, Bianka Woloncewicz, "Distance between Bound Entangled States from Unextendible Product Bases and Separable States", Quantum Reports 2, 49–56 (2020),

których mgr Pandya jest współautorem.

Praca doktorska p. mgr. P. Pandya składa się z sześciu rozdziałów, krótkiego dodatku oraz spisu literatury. Rozdział pierwszy stanowi wprowadzenie do problemu separowalności. Autor najpierw omawia tutaj definicje separowalności w scenariuszu dwu i wielocząstkowym (w tym k-separowalności), następnie kryteria separowalności oraz miary splątania. Rozdział ten kończy opis kilku algorytmów, które można wykorzystać do badania separowalności konkretnych stanów.

Rozdział drugi poświęcony jest opisowi rekurencyjnego algorytmu Gilberta, który jest stosowany do poszukiwania minimum funkcji kwadratowej określonej na zbiorze wypukłym. Opisano zastosowanie uproszczonej wersji tego algorytmu do znajdowania najbliższego od danego stanu ρ_0 stanu separowalnego. Stosowaną odległością jest metryka Hilberta–Schmidta. W tym uproszczonym wariancie najbardziej zasobochłonny krok – optymalizacja – zastąpiony jest przez losowanie stanu separowalnego i sprawdzenie czy leży on bliżej niż stan wyznaczony w poprzedniej iteracji.

W rozdziale trzecim Autor omawia zastosowanie uproszczonego algorytmu Gilberta do wyznaczania najbliższego separowalnego sąsiada do danego stanu ρ_0. Rozdział rozpoczyna dyskusja przypadku dwucząstkowego. Autor rozważa najpierw stan maksymalnie splątany dwóch kuditów. Dla tego stanu można analitycznie znaleźć postać najbliższego stanu separowalnego, jest to stan Wernera o odpowiednich parametrach. Wobec tego stan maksymalnie splątany może służyć do przetestowania efektywności stosowanego algorytmu i to też Autor robi. Uzyskane rezultaty pokazują, że odległość pomiędzy stanem znalezionym przez algorytm a wyznaczonym analitycznie najbliższym stanem splątanym dąży do zera wraz ze wzrostem ilości iteracji algorytmu. Zgodnie z oczekiwaniami zbieżność jest najszybsza dla stanu maksymalnie splątanego dwóch kubitów, jej szybkość maleje wraz ze wzrostem wymiaru lokalnych przestrzeni Hilberta. Następnie Autor rozważa N-qubitowy stan GHZ. Również w tym przypadku znana jest forma najbliższego stanu w pełni separowalnego. Testowanie algorytmu także w tym wypadku daje spodziewane rezultaty. Dla rozważanego w następnym paragrafie N-kubitowego stanu W nie jest znana analityczna postać najbliższego stanu w pełni separowalnego. Autor twierdzi, że algorytm Gilberta zastosowany w tym przypadku znajduje stany separowalne, których odległość od stanu W dla $N = 3$ i $N = 4$ jest większa niż analogiczna odległość dla stanu GHZ dla tych samych N co jest rezultatem oczekiwanym. Nasuwa się pytanie co w przypadku $N > 4$? Kolejnym przypadkiem analizowanym w tym rozdziale jest poszukiwanie najbliższego stanu biseparowalnego dla stanu wielocząstkowego. Zastosować tu można dwie strategie – rozważać ustaloną bipartycję lub poszukiwać najbliższego stanu biseparowalnego w dowolnej bipartycji. Okazuje się, że dla stanów GHZ oraz W stany biseparowalne otrzymane przy użyciu algorytmu Gilberta przy ustalonej bipartycji pokrywają się z najbliższymi stanami o dodatniej częściowej transpozycji znalezionymi metodą podaną w pracy Frank Verstraete, Jeroen Dehaene, Bart De Moor, "On the geometry of entangled states", Journal of Modern Optics 49 (2002), 1277–1287. Jak można się było spodziewać, stosując algorytm Gilberta bez ograniczania się do ustalonej bipartycji udało się otrzymać stany biseparowalne leżące bliżej stanów GHZ i W niż przy pierwszym podejściu.

Rozdział czwarty jest poświęcony konstrukcji optymalnych świadków splątania przy użyciu algorytmu Gilberta. Rozdział rozpoczyna się od bardzo przystępnego i jasnego opisu koncepcji świadków splątania, ich własności oraz związku optymalnych świadków splątania z najbliższym stanem separowalnym. Przy pomocy takiego stanu możemy skonstruować optymalny świadek splątania. Jest to zatem logiczna kontynuacja badań opisanych w poprzednim rozdziale. W następnych paragrafach Autor podaje jawną postać świadków splątania skonstruowanych przy pomocy najbliższych stanów separowalnych znalezionych w rozdziale trzecim. W ostatnim paragrafie Autor zajmuje się problemem konstrukcji świadków splątania mogących potwierdzić splątanie stanów ze splątaniem związanym. Jednym ze sposobów konstrukcji stanów ze splątaniem związanym jest wykorzystanie nierozszerzalnych baz produktowych (*unextentible product bases*). W literaturze znana jest konstrukcja, podana w Somshubhro Bandyopadhyay, Sibasish Ghosh, Vwani Roychowdhury "Non-full-rank bound entangled states satisfying the range criterion", Phys. Rev. A 71 (2005), 012316, świadków splątania potwierdzających splątanie tak otrzymanych stanów. Autor porównuje świadki splątania skonstruowane za pomocą metody opisanej we wspomnianej pracy PRA 71 (2005), 012316 ze świadkami splątania otrzymanymi z wykorzystaniem najbliższego stanu separowalnego i optymalizacji przy użyciu algorytmu Gilberta. Okazuje się, że w większości dyskutowanych przypadków świadek otrzymany tą ostatnią metodą jest bliższy optymalnego niż świadek otrzymany metodą z Phys. Rev. A 71 (2005), 012316.

W rozdziale piątym Autor zajmuje się nieco inną tematyką a mianowicie splątaniem wielocząstkowym w paradygmacie tzw. samotestowania. Podejście takie znajduje wiele zastosowań, między innymi w dowodach bezpieczeństwa w kwantowej kryptografii, w których stosowane przez strony urządzenia traktowane są jak czarne pudełka (device-independent certification). Idea tego podejścia opiera się o spostrzeżenie, że często maksymalne dopuszczalne w mechanice kwantowej łamanie nierówności typu Bella jest możliwe tylko w pewnym określonym stanie kwantowym i/lub przy wykorzystaniu tylko określonych pomiarów. Zatem obserwując takie łamanie możemy mieć pewność, że wyprodukowany przez czarne pudełko stan kwantowy ma deklarowaną postać a strony wykonały określone pomiary (oczywiście zarówno ten stan jak i pomiary określone są z dokładnością do pewnych transformacji). W pierwszych paragrafach rozdziału piątego Autor wyjaśnia problem samotestowania na przykładzie przypadku dwucząstkowego a następnie przechodzi do trudniejszego przypadku wielocząstkowego. Podejście zaproponowane przez Autora w tym przypadku ma zastosowanie do sytuacji gdy każdy z N obserwatorów ma do dyspozycji dwie dychotomiczne obserwable. Autor rozważa zarówno nierówności Bella liniowe (w formie Wernera–Wolfa–Weinfurtera–Żukowskiego–Bruknera (WWWŻB) oraz Mermina–Adrehali–Belinskiego–Klyshko (MABK)) jak i nieliniowe (kwadratowe nierówności Uffinka). Z technicznego punktu widzenia podstawą sformułowania warunków samotestowania dla powyższych nierówności jest możliwość jednoczesnej reprezentacji obserwabli za pomocą macierzy antydiagonalnych, co jest jawnie pokazane w rozprawie. Korzystając z tej reprezentacji Autor pokazuje, że żeby osiągnąć maksymalne łamanie N-cząstkowej nierówności MABK obserwatorzy muszą dzielić N-kubitowy stan GHZ i mierzyć jedną z obserwabli σ_x i σ_y każdy (z dokładnością do lokalnych izometrii). Identyczny rezultat jest udowodniony dla N-cząstkowej nierówności Uffinka. W przypadku nierówności WWWŻB Autor rozważa tylko przypadek 3-cząstkowy i przytacza otrzymane rezultaty bez ich dowodów. Nasuwa się pytanie czy dla $N > 3$ maksymalne łamanie nierówności WWWŻB również można osiągnąć tylko w stanie GHZ?

Pracę kończy krótkie podsumowanie.

Z przytoczonego powyżej omówienia rozprawy doktorskiej p. mgr. P. Pandya widać, że trzy zasadnicze jej rozdziały (tzn. rozdziały 3, 4 i 5) tematycznie odpowiadają dość dokładnie trzem pracom, których p. Pandya jest współautorem. Z tego zapewne wynika, że rozprawa wyraźnie dzieli się na dwie, dość luźno ze sobą powiązane części. Pierwsza część, obejmująca rozdziały 3 i 4, poświęcona jest rozwinięciu metod pozwalających stwierdzić, czy dany stan jest splątany czy nie. Z kolei część druga, którą tworzy rozdział piąty rozprawy, zajmuje się samotestowaniem w przypadku wielocząstkowym.

Wyniki osiągnięte przez Autora uważam za wartościowe i ciekawe. Mnie osobiście najbardziej podobają się rezultaty ostatniego, piątego rozdziału rozprawy. Zastosowane tam metody są bardzo eleganckie i stosunkowo proste a mimo to pozwalają na rozwiązanie interesujących i złożonych problemów.

Praca doktorska mgr. Pandya jest napisana bardzo starannie. W trakcie jej czytania dostrzegłem w zasadzie tylko dwa drobne błędy:

- Przed wzorem (1.2) na str. 2 Autor definiuje k-częściową partycję zbioru $L = \{1, 2, \ldots, N\}$ jako rodzinę podzbiorów $I_1, \ldots, I_k \subset L$ takich, że $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k = L$ oraz $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_k = \emptyset$. Wydaje mi się, że drugi z tych warunków powinien być zastąpiony żądaniem wzajemnej rozłączności zbiorów $I_1, \ldots, I_k$ czyli układem warunków

$I_j \cap I_j = \emptyset$ dla $i \neq j$. Definicja przyjęta przez Autora dopuszcza taką na przykład partycję zbioru $L = \{1,2,3\}$: $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1,2\}$, $I_3 = \{3\}$. Rzeczywiście, dla powyższych zbiorów I_1, I_2, I_3 zachodzi $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1,2,3\}$, $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset$.

- Na stronie 85, w trzeciej linijce po równaniu (5.6) zamiast $M_{x|a}$ oraz $N_{y|b}$ powinno być $M_{a|x}$, $N_{b|y}$.

Mam też zarzut ogólny dotyczący całej pracy. Otóż w wielu miejscach Autor podając własności lub definicje nie odnosi się w ogóle do literatury. Wybór tych miejsc jest dość losowy – na przykład omawiając konkurencję nie cytuje żadnej pracy (nawet W. K. Wooters, "Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits", Phys. Rev. Lett. 80, 2245, (1998)) natomiast w następnym akapicie przy omawianiu negativity cytuje już odpowiednią pracę. Innym przykładem jest paragraf 5.3.5, poświęcony samotestowaniu nierówności Uffinka, gdzie brak odnośnika do prac Uffinka. Przytoczyłem tu dwa przykłady, takich miejsc w pracy jest więcej.

Konkludując, stwierdzam, że pomimo powyższych drobnych uwag rozprawa doktorska mgr. Palasha Pandya spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane pracom doktorskim. Przedstawione przez doktoranta wyniki są naukowo interesujące i wartościowe. Wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Palasha Pandya do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Paweł Caban