# Streszczenie rozprawy doktorskiej

## pt.: „Ideały zbiorów nigdziegęstych w topologiach na zbiorze liczb naturalnych”

napisanej przez **mgr Martę Kwelę**

pod kierunkiem prof. UG, dr. hab. Andrzeja Nowika oraz dr. Jacka Tryby

---

Niniejsza rozprawa doktorska poświęcona jest badaniu ideałów zbiorów nigdziegęstych w topologiach na zbiorze liczb naturalnych. Rozpatrywane w pracy problemy, leżące na styku teorii mnogości, kombinatoryki, teorii liczb i topologii, stanowią doskonałą okazję do zaobserwowania wzajemnego przenikania się pozornie odrębnych dziedzin matematyki.

Jednym z poruszanych zagadnień jest pojęcie reprezentowalności w sensie Marczewskiego-Burstina, którym zajmowali się m.in. M. Balcerzak, A. Bartoszewicz, K. Ciesielski i P. Koszmider. W roku 2001 M. Balcerzak, A. Bartoszewicz, J. Rzepecka i S. Wroński zauważyli, że schemat, według którego otrzymuje się rodzinę zbiorów nigdziegęstych w danej topologii, okazuje się być interesujący również wtedy, gdy rodzinę niepustych zbiorów otwartych zastąpimy dowolną rodziną $\mathcal{F}$ niepustych podzbiorów danego zbioru $X$. Rodzina:

$$S^0(\mathcal{F}) = \{A \subseteq X : \ \forall_{U\in\mathcal{F}} \ \exists_{V\in\mathcal{F}} \ V \subseteq U \setminus A\}$$

stanowi więc uogólnienie nie tylko pojęcia zbiorów nigdziegęstych, ale także pojęcia klasycznych zbiorów zerowych Marczewskiego ($s^0$), pochodzącego z 1935 roku. Ideały dające się przedstawić w postaci $S^0(\mathcal{F})$ dla pewnej rodziny $\mathcal{F}$ nazywamy MB-reprezentowalnymi. Dla ideałów na zbiorze liczb naturalnych wprowadzamy w rozprawie bardziej restrykcyjny wariant pojęcia MB-reprezentowalności, wymagając dodatkowo, żeby rodzina podzbiorów $\mathbb{N}$ reprezentująca dany ideał była przeliczalna – mówimy wówczas o ideałach MB-przeliczalnie-reprezentowalnych (w skrócie: $\mathcal{MBC}$). Badamy ich własności oraz pokazujemy związek z ideałami reprezentowanymi topologicznie wprowadzonymi przez M. Saboka i J. Zapletala. Rozważamy również pojęcie rozszerzalności do ideałów $\mathcal{MBC}$.

Głównym celem rozprawy jest jednak zbadanie ideałów zbiorów nigdziegęstych w topologiach na $\mathbb{N}$, których bazy składają się z nieskończonych ciągów arytmetycznych spełniających pewne warunki. W literaturze można znaleźć przykłady kilku takich topologii. W 1955 roku H. Furstenberg wprowadził topologię, przy użyciu której zaprezentował elegancki topologiczny dowód istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych. W roku 1959 S. Golomb przedstawił podobny dowód z wykorzystaniem topologii zdefiniowanej w 1953 roku przez M. Browna. W 1969 roku A. M. Kirch zmodyfikował zaś definicję tej topologii, chcąc uzyskać dodatkowe własności wyposażonego w nią zbioru $\mathbb{N}$. Będziemy również rozważać topologię dzielników zdefiniowaną w 1993 roku przez G. B. Rizzę oraz topologię wspólnych dzielników wprowadzoną przez P. Szyszkowską (Szczukę) w roku 2013.

Wszystkie wymienione topologie były niedawno szeroko badane przez P. Szyszkowską (Szczukę), a niektóre z nich również m.in. przez T. Banakha, J. Mioduszewskiego, S. Turka, a także P. L. Clarka, N. Lebowitza-Lockarda, F. Marko, Š. Porubský'ego i wielu innych matematyków z całego świata. Warto zaznaczyć, że część z tych topologii – stanowiąc nietrywialne lecz elementarne przykłady i kontrprzykłady dla wielu topologicznych własności – omawiana jest również w klasycznej pozycji L. A. Steena i J. A. Seebacha pt. „Counterexamples in Topology".

W rozprawie definiujemy ideały: Furstenberga, Golomba, Kircha, Rizzy i Szyszkowskiej jako ideały zbiorów nigdziegęstych w podanych topologiach. W pierwszej kolejności omawiamy ich podstawowe własności ważne z punktu widzenia teorii ideałów na zbiorach przeliczalnych. Zajmujemy się także m.in. pojęciem własności FinBW wprowadzonym w 2007 roku przez R. Filipowa, N. Mrożka, I. Recława i P. Szucę dla ideałów na $\mathbb{N}$ – prezentujemy nową charakteryzację ideałów z własnością FinBW, by przy jej użyciu otrzymać wyniki dla ideałów zbiorów nigdziegęstych w badanych topologiach. Własność ta jest również związana z rozszerzalnością do ideałów sumowalnych i własnością Riemanna (dotyczącą klasycznego twierdzenia o warunkowo zbieżnych szeregach liczbowych), którymi zajmowali się np. R. Filipów, P. Klinga, A. Nowik, P. Szuca i W. Wilczyński. Udzielamy również negatywnej odpowiedzi na pytanie postawione niedawno przez C. Uzcáteguiego w przeglądowym artykule poruszającym aktualne tematy dotyczące ideałów na zbiorach przeliczalnych, pokazując, że zbiór liczb naturalnych z topologią Rizzy jest przeliczalną przestrzenią topologiczną bez punktów izolowanych, w której ideał zbiorów nigdziegęstych jest $\mathcal{MBC}$, ale nie jest izomorficzny z NWD($\mathbb{Q}$).

Większą część pracy stanowi jednak omówienie możliwych zawierań pomiędzy wymienionymi ideałami. Dowodzimy zachodzących między nimi inkluzji lub uzasadniamy ich brak, konstruując przykłady zbiorów rozróżniających poszczególne ideały. Odpowiadamy przy tym również na pytania postawione przez A. Nowika i P. Szyszkowską.

Jeden z rozdziałów rozprawy poświęcony jest rozważaniom dotyczącym topologii $\mathcal{T}_m$, dla $m \in \mathbb{N}$, wprowadzonych niedawno przez P. Szyszkowską – jest to uogólnienie definicji topologii Kircha, która, według tej konwencji, stanowi rodzinę $\mathcal{T}_1$. Proponujemy dalsze uogólnienie powyższej definicji, rozpatrując topologie $\mathcal{T}_{(\alpha_n)}$ dla ciągów $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o nieujemnych wyrazach całkowitych. Badamy możliwe zawierania pomiędzy ideałami zbiorów nigdziegęstych $\mathcal{I}_{(\alpha_n)}$ w tych topologiach – podajemy m.in. charakteryzację, kiedy $\mathcal{I}_{(\alpha_n)} \subseteq \mathcal{I}_{(\beta_n)}$. Uzyskane wyniki pozwalają sformułować wnioski dla ideałów zbiorów nigdziegęstych w topologiach $\mathcal{T}_m$ – otrzymujemy w szczególności przeliczalny łańcuch ideałów topologicznych, w którym $\mathcal{I}_m \subsetneq \mathcal{I}_{m+1}$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Pokazujemy również, że pośród ideałów $\mathcal{I}_{(\alpha_n)}$ można znaleźć $\subseteq$-antyłańcuch mocy $\mathfrak{c}$.

W dalszej części rozprawy omawiamy natomiast związki zachodzące pomiędzy wybranymi dobrze znanymi ideałami odgrywającymi istotną rolę w teorii liczb i kombinatoryce, takimi jak ideał zbiorów o gęstości asymptotycznej zero $\mathcal{I}_d$, ideał sumowalny $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, ideał van der Waerdena $\mathcal{W}$ i ideał Hindmana $\mathcal{H}$, a także dogłębnie badanymi w rozprawie ideałami topologicznymi: Furstenberga, Golomba, Kircha, Rizzy i Szyszkowskiej. Podsumowujemy tym samym, w jaki sposób rozważania podjęte w rozprawie wpisują się w klasyczne, znane od lat wyniki.