dr hab. Eliza Jabłońska
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo–Hutnicza w Krakowie
e-mail: elizajab@agh.edu.pl

Kraków, 27.09.2021

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Marty Kweli pt. *„Ideały zbiorów nigdziegęstych w topologiach na zbiorze liczb naturalnych”*

Punktem wyjścia niniejszej rozprawy doktorskiej jest następujący rezultat M. Balcerzaka, A. Bartoszewicza, J. Rzepeckiej i S. Wrońskiego[1]:

Dla dowolnego zbioru $X \neq \emptyset$ i rodziny $\mathcal{F} \subseteq 2^{X\setminus\{\emptyset\}}$ rodzina

$$S^0(\mathcal{F}) = \{A \subseteq X : \forall\, U \in \mathcal{F}\ \exists\, V \in \mathcal{F}\ \ V \subseteq U \setminus A\}$$

jest ideałem, zaś rodzina

$$S(\mathcal{F}) = \{A \subseteq X : \forall\, U \in \mathcal{F}\ \exists\, V \in \mathcal{F}\ \ (V \subseteq U \setminus A\ \vee\ V \subseteq U \cap A)\}$$

jest ciałem.

Ideały, które można przedstawić w postaci $S^0(\mathcal{F})$ z pewną rodziną $\mathcal{F}$, nazywamy reprezentowalnymi w sensie Marczewskiego–Burstina. W naturalny sposób pojawia się więc pytanie, które ideały są $\mathcal{MB}$–reprezentowalne?

W niniejszej rozprawie autorka skupia się na klasycznych ideałach zbiorów nigdziegęstych na zbiorze liczb naturalnych, zadanych przy użyciu ciągów arytmetycznych, modyfikując jednocześnie pojęcie $\mathcal{MB}$-reprezentowalności poprzez pojęcie $\mathcal{MBC}$–reprezentowalności, w którym dodatkowo wymaga się przeliczalności rodziny $\mathcal{F}$.

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe definicje i fakty na temat ideałów i ich własności. Tu autorka wprowadza m.in. pojęcia: ideału $\mathcal{I}_d$, ideału sumowalnego, a także ideałów van der Waerdena, Hindmana, Furstenberga, Golomba, Kircha, Rizzy czy Szyszkowskiej.

W rozdziale drugim autorka głównie skupia się na ideałach $\mathcal{MBC}$–reprezentowalnych. Dowodzi, że ideały Furstenberga, Golomba, Kircha, Rizzy i Szyszkowskiej są $\mathcal{MBC}$–reprezentowalne, w odróżnieniu od ideałów $\mathcal{I}_d$, $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$, van der Waerdena czy Hindmana, które nie tylko nie są $\mathcal{MBC}$ –reprezentowalne, ale również nie są rozszerzalne do ideałów $\mathcal{MBC}$–reprezentowalnych. Autorka wykazuje m.in., że każdy ideał $\mathcal{MBC}$–reprezentowalny jest typu $F_{\sigma\delta}$, $\mathcal{I}$–przeliczalnie oddzielalny oraz słabo–selektywny. Na uwagę zasługuje udowodniony ciąg zależności pomiędzy ideałami $\mathcal{MBC}$-reprezentowalnymi, przeliczalnie oddzielalnymi, rozszerzalnymi do ideału $\mathcal{MBC}$–reprezentowalnego i ω–+–diagonalizowalnymi. Całość dopełnia schemat zależności pomiędzy wybranymi własnościami ideałów ze str. 43. Dowody umieszczonych w tym rozdziale rezultatów są dość elementarne, ale pomysłowe.

Trzeci i czwarty rozdział poświęcono ideałom Furstenberga, Golomba, Kircha, Rizzy i Szyszkowskiej. Autorka bada zależności pomiędzy tymi ideałami oraz wybrane własności tych ideałów, m.in. gęstość, $\mathcal{MBC}$–reprezentowalność, FinBW, rozszerzalność do ideałów sumowalnych,

[1] M. Balcerzak, A. Bartoszewicz, J. Rzepecka, S. Wroński, *Marczewski fields and ideals*, Real Anal. Exchange 26(2) (2000/2001), 703–716.

złożoność deskryptywną, czy są P–ideałami. W rozdziale czwartym badane są również rodziny $Dense(\mathcal{F})$ i $Bern(\mathcal{F})$ zdefiniowane przez A. Nowika[2)], jednak tylko w kontekście topologii Rizzy, co pozostawia pewien niedosyt.

W rozdziale piątym znajdujemy uogólnienia topologii Kircha i Szyszkowskiej, a więc topologie $\mathcal{T}_{(\alpha_n)}$ wprowadzone przez bazy postaci

$$\mathcal{B}_{(\alpha_n)} := \{\{an+b\} : (a,b)=1, b<a, \forall\, i\in\mathbb{N}\ l_{p_i}(a)\leqslant\alpha_i\}$$

z pewnymi ciągami (α_n), które nie są prawie wszędzie równe zero (w sensie ideału zbiorów skończonych). Ten rozdział uważam za najcenniejszy. Autorka dowodzi, że przestrzenie topologiczne wprowadzone przez takie bazy są T_2, ale nie T_3. Mój respekt budzi Twierdzenie 5.2.1 wraz z niebanalnym dowodem, pochodzące z nieopublikowanej jeszcze pracy napisanej wspólnie z promotorem pomocniczym dr Jackiem Trybą[3)]. Jest to pełna charakteryzacja, kiedy można wprowadzić porządek w rodzinie wszystkich ideałów zbiorów nigdziegęstych NWD($\mathcal{T}(\alpha_n)$). Z kolei z Twierdzeń 5.2.3 i 5.2.4 dowiadujemy się, że ideał zbiorów nigdziegęstych NWD($\mathcal{T}_{(\alpha_n)}$) jest istotnie zawarty w ideale Golomba. Ciekawa wydaje się również konstrukcja antyłańcucha w rodzinie zbiorów nigdziegęstych NWD($\mathcal{T}_{(\alpha_n)}$) z częściowym porządkiem $\subseteq$.

W rozdziale szóstym autorka skupia się na zbadaniu relacji pomiędzy rozważanymi wcześniej ideałami. Za bardzo cenną uważam tabelę na str. 78, która zbiera wszystkie informacje na ten temat. Nie rozumiem, dlaczego autorka umieszcza ponownie Przykłady 6.8, 6.9, 6.14, 6.16 oraz Twierdzenia 6.10, 6.11, skoro są one w istocie powtórzeniem twierdzeń i przykładów z rozdziału 3. Nie spotkałam się też do tej pory z cytowaniem publikacji *„(zasadniczo [26])”* – co to właściwie oznacza?

Na końcu pracy znajduje się Dodatek, w którym zostały zebrane własności rozważanych w rozprawie ideałów, niestety tylko wybranych. Z przyjemnością zobaczyłabym (choćby podczas obrony rozprawy doktorskiej) tabelę z pozostałymi własnościami takimi jak: przeliczalna oddzielalność, słaba selektywność, reprezentowalność topologiczna, ω–+–oddzielalność, rozszerzalność do ideału sumowalnego. Jednocześnie w tabeli nie uwzględniono ideału $\mathcal{I}_c$, który powinien się tam znaleźć choćby jako przykład ideału, który nie jest $\mathcal{MBC}$–reprezentowalny, ale jest rozszerzalny do takiego ideału. Wreszcie brakuje w tabeli ideałów NWD($\mathcal{T}_{(\alpha_n)}$). Kompletna tabela pozwoliłaby autorce ocenić, czy są jeszcze otwarte problemy dotyczące wspomnianych własności tych ideałów.

Uwagi szczegółowe

- Uwaga na str. 21 powinna być raczej lematem.
- Oczywistą inkluzję, że $S^0(\mathcal{F})\subset S(\mathcal{F})$ należałoby napisać po Stwierdzeniu 2.1., obok uwagi $\mathcal{F}\cap S^0(\mathcal{F})=\emptyset$, a nie w dowodzie Stwierdzenia 2.1.2.
- Autorka cytuje charakteryzację Mazura w Twierdzeniu 1.2.6, a następnie w dowodzie Twierdzenia 2.2.4 cytuje oryginalne źródło zamiast Twierdzenia 1.2.6.
- W Definicji 2.3.1 od razu na początku zdania powinna znaleźć się precyzyjna nazwa *„Ideał $\mathcal{I}$ na zbiorze $\mathbb{N}$ jest reprezentowany topologicznie na X przez I”* (autorka dopiero w ostatnim zdaniu podaje precyzyjną nazwę).
- Zamiast formułować trywialne Stwierdzenie 2.4.2 i Wniosek 2.4.3, wystarczy napisać jedno zdanie komentarza.

[2)] A. Nowik, *Marczewski–Burstin representations vs. Bernstein and dense subsets*, Demonstratio Math. 49 (2016), 372–378.

[3)] M. Kwela, J. Tryba, *On some generalizations of the Kirch's ideal*, wysłana do czasopisma.

- We Wniosku 2.4.13 wystarczy napisać tylko, że $Fin \oplus \mathcal{I}_d$ jest rozszerzalny do $\mathcal{MBC}$, ale nie jest $\mathcal{MBC}$. Pozostała treść tego wniosku (a zwłaszcza uzasadnienia w nawiasach wynikające z przechodniości implikacji) powinna znaleźć się jako komentarz po wniosku.
- Podrozdział 3.2. jest nieporozumieniem ze względu na swoją objętość. Korzystniej byłoby połączyć podrozdziały 3.2 i 3.3.
- Zapis $b \bmod a = b_a$ należałoby raczej zastąpić zapisem $b = b_a \pmod a$.
- Tytuł podrozdziału 4.1 *„Przykłady zbiorów"* jest bardzo nieprecyzyjny.
- Sformułowanie *„znaczna większość zbiorów"* (str. 54) jest na tyle nieprecyzyjne w matematyce, że powinno być w cudzysłowie.
- Diagram na str. 62 nie uwzględnia ideałów $\mathcal{I}_G, \mathcal{I}_K$.
- Stwierdzenia 5.1.2 i 5.1.3 należałoby przeformułować *„Dla dowolnych $(\alpha_n), (\beta_n) \in \mathcal{S}$"*.

Rozprawa tworzy logiczną całość i jest napisana w sposób staranny. Dowody zostały zapisane z należytą precyzją. Autorka skrupulatnie wskazuje źródła cytowanych rezultatów. Moje zastrzeżenia budzi jednak rozwlekły styl pisania pracy, przez który i tak dość długa praca (ponad 90 stron) staje się mniej czytelna. Autorka, zamiast numerować wprowadzane definicje, aby móc się do nich w przyszłości łatwo odwołać, ponownie przytacza całą treść definicji (słusznie zresztą zakładając, że wprowadzone definicje i własności ideałów są trudne do odnalezienia w tak długiej pracy). W początkowej części lektury czytelnik zapewne docenia życzliwość autorki, jednak z czasem zwrot *„Przypomnijmy, że"* wręcz sugeruje czytelnikowi brak indeksu pojęć i symboli na końcu pracy. W ten sposób pojawiają się kilkakrotnie definicje: $\mathcal{A}^*$, $p_n\#$, ideału, σ–ideału, ideału sumowalnego, gęstego, przeliczalnie oddzielalnego, $\mathcal{I}_c$, $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$, ideałów Furstenberga, Golomba, Kircha, Szyszkowskiej, własności FinBW czy Riemanna (str. 27, 31, 39, 45, 52, 54, 56, 57, 61, 65, 40), aż wreszcie wszystkich rozważanych ideałów (str. 77). Ponownemu przytaczaniu definicji towarzyszy cytowanie pełnych treści stwierdzeń i przykładów z wcześniejszej części pracy, o czym już wspominałam w trakcie omawiania rozdziału 6.

Przytoczenie definicji aksjomatów oddzielania, jak również definicji równoważności baz (w dodatku dwukrotnie – str. 64, 67), wydaje się być zbędne (są to pojęcia wprowadzane w podstawowym kursie topologii), zwłaszcza że autorka nie wyjaśnia mniej znanych w cyklu kształcenia pojęć, jak choćby *„przestrzeń polska"* (oczywiście nie mam najmniejszych wątpliwości, że autorka zna dobrze definicję).

Trudno też nie odnieść wrażenia, że redakcja pracy opierała się na tłumaczeniu rezultatów (zapewne z przygotowanych publikacji) z języka angielskiego na język polski. Niestety zbyt dosłowne tłumaczenie prowadzi do pojawienia się sformułowań niepoprawnych stylistycznie, z których na pierwszy plan wysuwa się dosłowne tłumaczenie zwrotu *such that*, które nie odpowiada polskiej składni zdania; np. na str. 15 „Niech f będzie bijekcją, taką że ..." zamiast „ Niech f będzie taką bijekcją, że..." (takich przykładów w pracy jest całe mnóstwo). Mniej rażące są sformułowania: *„W tym rozdziale"* zamiast *„W rozdziale tym"* , *„To pojęcie zostało wprowadzone"* zamiast *„Pojęcie to ..."*, czy *„Te przestrzenie były później badane przez"* itp. Autorka nie ustrzegła się też kilku bardzo niefortunnych sformułowań; np. *„$(\mathbb{Z}, \tau_F)$ była wtedy przestrzenią metryzowalną"* (teraz już nie jest?).

Interpunkcja nie wydaje się być najmocniejszą stroną autorki; niepotrzebne dwukropki (np. na str. 37), przecinki przed *oraz* czy *i* (np. na str. 28, 47). Niektóre z nich wydają się być konsekwencją zbyt dosłownego tłumaczenia z języka angielskiego (o czym już wspominałam), np. *„Jednocześnie, $A \in \mathcal{I}_d$, ponieważ..."*, *„$A \in \tau_G$, i, oczywiście, $A \subset \ldots$"*. Oprócz tego autorka zdecydowanie nadużywa pauz w tekście. Zastępuje nimi wymagane kropki, przecinki, średniki itp. (np. na str. 35, 47, 51). Na str. 68 ewidentnie brakuje wcięć akapitowych.

Pewną wątpliwość może budzić fakt, że autorka w swoim dorobku posiada tylko jedną (współautorską) pracę opublikowaną[4], zaś pozostałe 4 prace autorki[5] [6] [7] [8] (zwłaszcza te 3 samodzielne) nie zostały jeszcze przyjęte do druku (tylko jedna z nich jest wysłana do czasopisma). Autorka precyzyjnie podaje w rozprawie, że wyniki z podrozdziału 2.4 oraz rozdziałów 4. i 6. są wynikami samodzielnymi, a poziom rezultatów zawartych w tych częściach rozprawy wskazuje na dobre rozumienie przez autorkę rozważanej w pracy tematyki.

Podsumowując, do mocnych stron omawianego doktoratu należą poprawne merytorycznie wyniki, zapisane wraz z dowodami z należytą precyzją. Natomiast słabe strony to przede wszystkim rozwlekły styl przygotowanej rozprawy oraz dorobek publikacyjny doktorantki (jedna publikacja napisana wraz z promotorem). Biorąc pod uwagę wszystkie powyższe argumenty, uważam, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Marty Kweli do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Eliza Jabłońska

Eliza Jabłońska

---

[4] M. Kwela, A. Nowik, *Ideals of nowhere dense sets in some topologies on positive integers*, Topology Appl. 248 (2018), 149–163.

[5] M. Kwela, *Extendability to $\mathcal{MBC}$ ideals*, artykuł w przygotowaniu.

[6] M. Kwela, *Some properties of the ideal of nowhere dense sets in the common division topology*, artykuł w przygotowaniu.

[7] M. Kwela, *Rizza's ideal and a comparision of some known set-theoretic ideals from number theory and combinatorics*, artykuł wysłany do czasopisma.

[8] M. Kwela, J. Tryba, *On some generalizations of the Kirch's ideal*, artykuł wysłany do czasopisma.