Załącznik nr 3

Autoreferat

1. Imiona i nazwisko: **Michał Szymon Stukow**

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

   - Stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany w 2006 roku na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Gdańskiego. Tytuł rozprawy doktorskiej: *Minimalne zbiory generatorów grup klas odwzorowań.* Promotor: prof. dr hab. Grzegorz Gromadzki
   - Tytuł magistra matematyki uzyskany w 2002 roku na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Gdańskiego. Tytuł pracy magisterskiej: *Grupa homeotopii powierzchni orientowalnej.* Promotor: prof. dr hab. Grzegorz Gromadzki

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

   - stanowisko adiunkta w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, od X 2009
   - stanowisko adiunkta w Instytucie Matematycznym PAN, X 2007 – IX 2009
   - stanowisko adiunkta w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, X 2006 – IX 2007
   - staż naukowy w Instytucie Mittag–Lefflera w Szwecji, IX 2006.
   - stanowisko asystenta w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, X 2002 – IX 2006

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):

Jednotematyczny cykl 6 publikacji pod tytułem

„Skręcenia Dehna na powierzchniach nieorientowalnych"

składający się z następujących prac:

[H1] M. Stukow. Dehn twists on nonorientable surfaces. *Fund. Math.*, 189:117–147, 2006.

[H2] M. Stukow. The twist subgroup of the mapping class group of a nonorientable surface. *Osaka J. Math.*, 46(3):717–738, 2009.

[H3] M. Stukow. A finite presentation for the mapping class group of a nonorientable surface with Dehn twists and one crosscap slide as generators. *J. Pure Appl. Algebra*, 218(12):2226–2239, 2014.

[H4] M. Stukow. A finite presentation for the twist subgroup of the mapping class group of a nonorientable surface. *Bull. Korean Math. Soc.*, 53(2):601–614, 2016.

[H5] M. Stukow. Subgroups generated by two Dehn twists on a nonorientable surface. *Top. Proc.*, 50:151–201, 2017.

[H6] M. Stukow. Subgroups of the Torelli group generated by two symmetric bounding pair maps. *Kodai Math. J.*, 39(3):530–534, 2016.

Poniżej znajduje się omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania. W całym referacie prace cytowane jako [H1]–[H6] odnoszą się do powyższego cyklu prac; prace cytowane jako [D1]–[D4] i [P1]–[P7] odnoszą się do moich pozostałych publikacji, których pełna lista znajduje się na stronie 8 autoreferatu; a pozostałe cytowane prace są pracami innych autorów i ich lista znajduje się na stronach 12–18.

SAuk

4.1 Wstęp

Niech S_g oznacza zamkniętą i orientowalną powierzchnię topologiczną rodzaju g. *Grupą klas odwzorowań* $\mathcal{M}(S_g)$ powierzchni S_g nazywamy grupę klas izotopii zachowujących orientację homeomorfizmów S_g. Jak wiadomo [Eps66] równoważnie możemy zdefiniować grupę $\mathcal{M}(S_g)$ jako grupę klas izotopii zachowujących orientację dyfeomorfizmów S_g dla jakiejkolwiek struktury gładkiej na S_g. Grupa klas odwzorowań jest od kilkudziesięciu lat przedmiotem intensywnych badań, których początki sięgają prac M. Dehna [Deh38, Deh87] i J. Nielsena [Nie27, Nie29, Nie32]. Duże zainteresowanie algebraicznymi własnościami grupy $\mathcal{M}(S_g)$ wynika z jej centralnej roli w topologii niskowymiarowej oraz w teorii powierzchni Riemanna. Nie sposób w tym miejscu szczegółowo omówić wszystkich kontekstów w jakich pojawia się potrzeba badań własności grup klas odwzorowań, dlatego ograniczymy się tylko do wypunktowania najważniejszych jej zastosowań:

- Grupa $\mathcal{M}(S_g)$ działa na ściągalnej przestrzeni Teichmüllera $\mathcal{T}_g$ i jako przestrzeń orbit otrzymujemy przestrzeń moduli $\mathcal{M}_g$ struktur powierzchni Riemanna na S_g. Dzięki temu wiele topologicznych własności przestrzeni moduli $\mathcal{M}_g$ wynika z algebraicznych własności grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$ [Mum67, Mac71, Har83, Har85, HZ86, Har91, Mor93, MW07].
- Skończone podgrupy grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$ to dokładnie grupy automorfizmów powierzchni Riemanna [Roy71, Ker80, Zei81, Ker83]. Zależność ta jest często wykorzystywana w obie strony: do dowodzenia twierdzeń topologicznych przy pomocy narzędzi holomorficznych [Har66, Wan90, BCG01], [D1, D4] i odwrotnie [BS99, BCCS10, BEMS15].
- Każda zwarta zamknięta 3-rozmaitość posiada rozkład Heegaarda, tzn. może być przedstawiona jako sklejenie dwóch handelbodies przy pomocy homeomorfizmu $f \in \mathcal{M}(S_g)$ sklejającego ich brzegi. Wiele własności otrzymanej w ten sposób 3-rozmaitości jest zakodowanych we własnościach homeomorfizmu f [Lic62, Thu76, FLP79, Thu88, CB89, Kap10].
- Rozkłady Heegaarda sfer homologicznych prowadzą do tzw. *grupy Torelli* $\mathcal{I}(S_g)$. Jest to podgrupa normalna grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$ składająca się z klas izotopii homeomorfizmów S_g, które działają trywialnie na pierwszej grupie homologii $H_1(S_g;\mathbb{Z})$ [Joh79, Joh83a, Joh83b, Mor89a, Mor91, Mor93]
- Grupa klas odwzorowań działa na kompleksie krzywych, który jest przestrzenią hiperboliczną w sensie Gromowa [MM99]. Własność ta z jednej strony stała się punktem wyjścia do dowodu hipotezy Thurstona o końcowych laminacjach [Min10, BCM12], a z drugiej strony pozwala stosować metody geometrycznej teorii grup do badania własności grup klas odwzorowań [BF02, BM08, BKMM12, MMS12]
- Na mocy twierdzenia Dehna-Nielsena-Baera grupa klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$ jest izomorficzna z grupą automorfizmów zewnętrznych $\mathrm{Out}^+(\pi_1(S_g))$ grupy podstawowej powierzchni S_g, które przeprowadzają relację definiującą $R = \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i]$ na jej sprzężenie. Związek ten jest punktem wyjścia do całego nurtu badań grupy automorfizmów zewnętrznych grupy wolnej $\mathrm{Out}^+(F_n)$ [BV95, Vog02, BV06].
- Grupa klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$ jest bardzo blisko związana z grupą B_n warkoczy Artina [Art26, Art47, Bir69, Bir74, BB05]. Związek ten jest aktywnie wykorzystywany w obie strony, zarówno do przenoszenia własności grup warkoczy na grupę klas odwzorowań, jak i do badania własności grup warkoczy przy pomocy ich geometrycznych reprezentacji w grupach klas odwzorowań [GVB68, Kor00, BB01, BM06, LM10, Cas16].
- Naturalnym uogólnieniem grupy warkoczy są tzw. *grupy Artina* i podobnie jak w przypadku grupy warkoczy są one bardzo blisko związane z grupami klas odwzorowań [PV96, Waj99, LP01, Par01].
- Jeszcze innym uogólnieniem grup warkoczy są warkocze na powierzchniach S innych niż dysk, lub równoważnie grupy podstawowe przestrzeni konfiguracji n punktów w S (uporządkowanych lub nie). Wiadomo, że jeżeli S ma ujemną charakterystykę Eulera, to tak

zdefiniowane grupy warkoczy mogą być traktowane jako podgrupy grup klas odwzorowań powierzchni z nakłuciami [IIM00, GG04, Bel08].

- Na mocy twierdzeń Gompfa [GS99] i Donaldsona [Don99], 4-rozmaitości symplektyczne mogą być utożsamione z rozwłóknieniami Lefschetza (z dokładnością do pewnych technicznych założeń na rodzaj włókna oraz ewentualnych rozdmuchań). Rozwłóknienia Lefschetza są z kolei sklasyfikowane przy pomocy monodromii, której odpowiadają bardzo specjalne relacje w grupie klas odwzorowań bazy rozwłóknienia. Zależność ta pozwala używać zarówno topologii symplektycznej do badania własności grup klas odwzorowań [Kor04] jak i odwrotnie, algebraicznych własności grup klas odwzorowań do badania topologii symplektycznej [EKK$^+$02, Gur04, Aur05, KS09, BMHM14]
- W przypadku 3-rozmaitości odpowiednikiem topologii symplektycznej jest topologia kontaktowa, która może być opisana przy pomocy rozkładów książkowych [Gir02]. Rozkłady te podobnie jak w przypadku symplektycznym, są kodowane przy pomocy monodromii [Etn06, PHM10, DKP15].
- Grupy klas odwzorowań powierzchni są blisko związane z innymi podobnie zdefiniowanymi grupami np. z grupą klas odwzorowań handlebody [Tak95, Waj98, IS15] lub grupą klas odwzorowań rozkładów Heegaarda [Nam07, JR13, CR12]

Grupa klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$ powierzchni nieorientowalnej N_g rodzaju g jest obiektem o wiele mniej zbadanym i z tego powodu jej związki z innymi dziedzinami matematyki są znacznie słabiej rozwinięte, niż ma to miejsce w przypadku orientowalnym. Pierwsze istotne wyniki sięgają prac Lickorsha, Chillingwortha i Birman [Lic63, Chi69, BC72], w których wyznaczono skończone zbiory generatorów dla grupy $\mathcal{M}(N_g)$. W późniejszym okresie ukazywały się tylko pojedyncze prace dotyczącego tego zagadnienia [Sch82, Wan90, PM04], aż do prac Korkmaza [Kor98, Kor02b], które na nowo rozbudziły zainteresowanie tym tematem. W chwili obecnej tematyka grup klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnych zaczęła się dość dynamicznie rozwijać i dzięki temu udało się uzyskać wiele ciekawych i fundamentalnych wyników [GP05, Irm06, Wah08, RW08, PP13, Irm14, AS14, HK15, PS15, Omo16].

Problem z przenoszeniem twierdzeń z przypadku orientowalnego na nieorientowalny polega na tym, że na ogół nie ma prostego sposobu na udowodnienie danego twierdzenia w przypadku grupy $\mathcal{M}(N_g)$ jako wniosku z analogicznego twierdzenia dla grupy $\mathcal{M}(S_g)$ (pomimo, że N_g posiada orientowalne podwójne nakrycie). W większości przypadków dowód takiego twierdzenia w przypadku nieorientowalnym musi być przeprowadzony w sposób niezależny i co więcej, często jest on znacznie trudniejszy, niż w przypadku orientowalnym. Dobrą ilustracją takiej sytuacji jest problem wyznaczenia przedstawienia grupy klas odwzorowań, który w przypadku orientowalnym został rozwiązany na początku lat 80-tych ubiegłego wieku [HT80, Waj83]. W późniejszym okresie uproszczono metody otrzymywania takiego przedstawienia oraz wyznaczono inne przedstawienia dla różnych grup klas odwzorowań powierzchni orientowalnych [Ger96, Ger01, Ben01, LP01, Hir02, Mat10]. Pomimo tych postępów w przypadku orientowalnym, w przypadku nieorientowalnym problem ten okazał się być bardzo skomplikowany technicznie i został rozwiązany dopiero niedawno [PS15].

4.2 Skręcenia Dehna i ich własności

Podstawowym przykładem [Deh38] nietrywialnego elementu w grupie klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$ jest tzw. *skręcenie Dehna* t_a względem krzywej zamkniętej a. Geometrycznie działanie tego homeomorfizmu ilustruje się rozcinając powierzchnię wzdłuż a, następnie skręcając jeden z końców otrzymanej powierzchni z brzegiem o 360° i na koniec ponownie sklejając dwa brzegi otrzymane w wyniku początkowego rozcięcia.

Jest kilka powodów dużego znaczenia skręceń Dehna:

- Skończona liczba skręceń Dehna generuje grupę klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$, co jako pierwszy odkrył Dehn [Deh87], a następnie niezależnie zauważył Lickorish [Lic62, Lic64].
- Skręcenia Dehna mają bardzo geometryczną naturę (są jednoznacznie związane z definiującymi je krzywymi zamkniętymi), co sprawia, że wiele ich własności ma proste interpretacje geometryczne. Mówiąc w dużym uproszczeniu, badanie skręceń Dehna (a więc pośrednio wszystkich elementów $\mathcal{M}(S_g)$) sprowadza się do badania własności krzywych zamkniętych na powierzchniach. Manifestacją tej uwagi jest fakt, że wiele fundamentalnych własności grup klas odwzorowań uzyskano badając różne kompleksy symplicjalne stowarzyszone z konfiguracjami krzywych na powierzchniach [HT80, Har83, Waj83, Har85, IM99, MM99].
- Jak pisałem we wstępie, są różne konstrukcje 3 i 4 rozmaitości, które za punkt wyjścia mają klasy izotopii homeomeorfizmów powierzchni. W większości tych konstrukcji skręcenia Dehna odgrywają bardzo szczególną rolę, np. prowadzą do chirurgii Dehna w przypadku rozkładów Heegaarda [Lic62], czy też do włókien osobliwych w rozwłóknieniach Lefschetza [KS09].
- Maksymalne grupy abelowe generowane przez rozłączne skręcenia Dehna są jednocześnie maksymalnymi beztorsyjnymi podgrupami abelowymi grupy klas odwzorowań [BLM83]. Te kraty generowane przez skręcenia Dehna pozwalają naśladować niektóre techniki badawcze stosowane przy badaniu grup liniowych [Iva88].
- Skręcenia Dehna są bardzo blisko związane z elementarnymi warkoczami i z tego powodu dzielą z nimi wiele algebraicznych własności [BH71].

Nasza wiedza o skręceniach Dehna na powierzchniach nieorientowalnych jest znacznie uboższa. Wiadomo [Lic63], że nie generują one całej grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$, a jedynie jej podgrupę $\mathcal{T}(N_g)$ indeksu 2, tzw. *podgrupę skręceń (twistów).*

Prawdopodobnie pierwszą pracą badającą w systematyczny sposób własności skręceń Dehna na powierzchniach nieorientowalnych jest [H1]. Punktem wyjścia do tych badań była analiza działania skręcenia Dehna t_a na innej krzywej zamkniętej b. W przypadku orientowalnym działanie to ma bardzo prosty opis w języku geometrycznego indeksu przecięcia $I(a,b)$ krzywych a i b.

$$I(t_a^n(b),b) = |n|\cdot I(a,b)^2.$$

Okazuje się, że w przypadku nieorientowalnym opis ten komplikuje się i przyjmuje postać ([H1], twierdzenie 3.3)

$$I(t_a^n(b),b) = |n|\cdot I(a,b)^2 - \sum_{i=1}^{k} k_i^2, \tag{1}$$

gdzie k_i są pewnymi liczbami naturalnymi w geometryczny sposób wyznaczonymi przez wzajemne położenie krzywych a i b. W odróżnieniu od przypadku orientowalnego, dowód wzoru (1) jest dość techniczny i skomplikowany. Opiera się on na dokładnej analizie wpływu wzajemnego położenia krzywych a i b na możliwe redukcje punktów przecięcia krzywych $t_a(b)$ i b. Jako wniosek z dowodu wzoru (1) otrzymałem następujące oszacowania ([H1], stwierdzenie 3.14)

$$\begin{aligned} &I(t_a^n(b),b) \geqslant I(a,b)\\ &I(t_a^n(b),b) \geqslant (|n|-1)I(a,b)^2 + 2I(a,b) - 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Oszacowania te mają kilka natychmiastowych konsekwencji

- Skręcenia Dehna na powierzchniach nieorientowalnych N_g innych niż N_2 są elementami nieskończonego rzędu w $\mathcal{M}(N_g)$ ([H1], wniosek 4.5). Stwierdzenie to jest dość proste w dowodzie w przypadku orientowalnym lub w przypadku skręcenia względem krzywej nierozdzielającej (tzn. takiej krzywej a, dla której przestrzeń $N_g \setminus a$ jest spójna), jednak w pozostałych przypadkach jest ono dalekie od bycia trywialnym.

SAnk

- Ogólniej, skręcenia Dehna względem rozłącznych krzywych generują wolną grupę abelową ([H1], stwierdzenie 4.4)
- Istnieją geometryczne charakteryzacje różnych relacji między skręceniami Dehna: $t_a^j = t_b^k$, $t_a^j t_b^k = t_b^k t_a^j$, $t_a^j t_b^k t_a^j = t_b^k t_a^j t_b^k$ ([H1], stwierdzenia 4.6, 4.7 i 4.8).

W dalszej części pracy [H1] zajmowałem się problemem wyznaczenia centrum grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej ([H1], stwierdzenie 6.2 i wniosek 6.3) oraz ogólniej, centralizatora podgrupy twistów $\mathcal{T}(N_g)$ ([H1], twierdzenie 6.2). Podstawowym narzędziem w tej części pracy były wprowadzone w [H1] *rozkłady na spodnie i spódnice* (ang. *P-S decompositions*). Pojęcie to okazało się być użytecznym również w innych badaniach grup klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnych [P1], [AS14]. Dodatek do pracy [H1] zawiera opis grupy klas odwzorowań butelki Kleina z jednym nakłuciem lub składową brzegu ([H1], twierdzenia A.5 i A.7).

Bardzo naturalnym pytaniem wyłaniającym się po badaniach zainicjowanych w pracy [H1] było pytanie o możliwe relacje pomiędzy dwoma różnymi skręceniami Dehna. W przypadku orientowalnym prawdopodobnie już od lat 70-tych ubiegłego wieku było wiadomo, że

Twierdzenie 1 *Jeżeli geometryczny indeks przecięcia dwóch okręgów a i b jest równy co najmniej 2, tzn. $I(a,b) \geqslant 2$, to skręcenia Dehna t_a i t_b generują grupę wolną.*

Wiadomo, że fakt ten był znany W. Thurstonowi, prawdopodobnie też N. Iwanowowi, a precyzyjny dowód można znaleźć np. w pracy [Ish96]. Naturalnym jest pytanie, czy analogiczne twierdzenie jest również prawdziwe w przypadku nieorientowalnym? Pytanie to kilkukrotnie było mi wprost stawiane przez różnych matematyków, ale przez kilka lat próby dowodu twierdzenia 1 w przypadku nieorientowalnym kończyły się niepowodzeniem. W przypadku orientowalnym znanych jest w tej chwili kilka różnych dowodów i nie są one specjalnie trudne. Co ciekawe, każdy z tych dowodów w dość spektakularny sposób załamuje się przypadku nieorientowalnym. Np. dowód Ishidy [Ish96] opiera się na prostej obserwacji ([Ish96], lemat 2.3), że jeżeli $I(a,b) \geqslant 2$, to

$$I(c,a) > I(c,b) \Longrightarrow I(t_a^k(c),a) < I(t_a^k(c),b). \tag{3}$$

Powyższa własność pozwala użyć lematu o ping-pongu i w dość prosty sposób wywnioskować, że grupa generowana przez t_a i t_b jest wolna. Okazuje się, że w przypadku nieorientowalnym implikacja (3) nie jest prawdziwa i co gorsza, istnieją wystarczająco generyczne kontrprzykłady ([H5], przykłady 3.2, 3.3 i 3.4), że trudno oczekiwać prostego sposobu (założeń) na naprawienie tej sytuacji.

Pomimo tych trudności, w pracy [H5] udało mi się udowodnić twierdzenie 1 w przypadku nieorientowalnym ([H5], twierdzenie 13.2). Dowód jest jednak bardzo długi i skomplikowany technicznie. Ogólna idea dowodu polega na ograniczeniu klasy krzywych c, na których pozwalamy działać skręceniom t_a i t_b tak, aby implikacja (3) była prawdziwa. Szczegóły są dość techniczne, więc nie sposób tutaj dokładnie ich opisać, ale w generycznym przypadku ([H5], stwierdzenie 7.1) ograniczenie polega na rozważaniu krzywych, które są zdefiniowane w otoczeniu $a \cup b$, i które wystarczająco mocno owijają się wokół a lub b (ang. *winds strongly around a or b*, rozdział 6 w [H5]). Ten sposób dowodu nadal pozostawia 3 nieskończone rodziny przypadków ([H5], rozdział 6): (S1), (S2) i (S3), które wymagają bardziej szczegółowej analizy ([H5], rozdziały 9 i 10). Osobnej analizy wymagają też przypadki $I(a,b) = 3$ i $I(a,b) = 2$ ([H5], rozdziały 11 i 12). Sama metodologia dowodu jest naturalną kontynuacją metod wypracowanych w [H1] i polega na dokładnej analizie wpływu wzajemnego położenia krzywych a i b na możliwe redukcje punktów przecięcia krzywych $t_a^k(c)$ i b. W trakcie dowodu byłem zmuszony wprowadzić wiele różnych nowych pojęć związanych z możliwym wzajemnym położeniem dwóch okręgów na powierzchni i w przyszłości planuję wyabstrahować część tych własności tak, aby uzyskać narzędzie mocniejsze niż geometryczny indeks przecięcia, którego przydatność w przypadku nieorientowalnym

SAulu

jest dość ograniczona. W chwili obecnej właśnie brak takich narzędzi jest głównym powodem nieproporcjonalnego skomplikowania tego dowodu. Cytując jednego z anonimowych recenzentów pracy [H5]

On the other hand, I tried other approaches (for example, through the orientable double covering of a non-orientable surface) in order to find an alternative proof to that of the present paper, but without success. So, I am now convinced that it would be hard to find a simpler proof of the main theorem with the current known techniques in the field.

Krótko po ukazaniu się pierwszej wersji pracy [H5] (w formie preprintu) również Dan Margalit podjął próbę znalezienia prostszego dowodu twierdzenia 1 w przypadku nieorientowalnym lub bezpośredniego sprowadzenia tego twierdzenia do przypadku orientowalnego. Próby te zakończyły się niepowodzeniem, ale przy okazji zauważyliśmy (w prywatnej korespondencji z D. Margalitem), że po podniesieniu twierdzenia 1 na nakrycie orientowalne otrzymujemy szczególny przypadek tzw. hipotezy Leiningera-Margalita ([LM10], hipoteza 5.1), w myśl której dwa elementy grupy Torelli albo są przemienne, albo generują grupę wolną. Obserwacja ta została szczegółowo opisana w pracy [H6], co teraz pokrótce omówię.

Jak wiadomo [Pow78], grupa Torelli $\mathcal{I}_g(S_g)$ jest generowana przez dwa rodzaje elementów: skręcenia Dehna względem krzywych rozdzielających oraz elementy postaci $t_a t_b^{-1}$, gdzie a i b są różnymi, ale homologicznymi klasami izotopii krzywych zamkniętych (są to tzw. *odwzorowania par ograniczających*, ang. *bounding pair maps*). Co więcej, jeżeli $g \geqslant 3$, to grupa $\mathcal{I}_g(S_g)$ jest generowana przez same odwzorowania par ograniczających. Jeżeli dodatkowo założymy, że istnieje symetria $\sigma\colon S_g \to S_g$, która przeprowadza a na b, to element $t_a t_b^{-1}$ możemy traktować jak podniesienie pojedynczego skręcenia Dehna z powierzchni $S_g/\langle\sigma\rangle$. Jeżeli symetria σ nie posiada punktów stałych, to powierzchnia $S_g/\langle\sigma\rangle$ jest automatycznie nieorientowalna. Korzystając teraz z faktu, że w pracy [H5] udało mi się rozszerzyć twierdzenie 1 na przypadek nieorientowalny pokazałem, że symetryczne pary odwzorowań par ograniczających albo są przemienne, albo generują grupę wolną ([H6], twierdzenie 2.3). Fakt ten, oraz duży zbiór przykładów odwzorowań spełniających założenia tego twierdzenia stanowi silną przesłankę ku prawdziwości hipotezy Leiningera-Margalita. W ramach dalszych badań planuję rozszerzyć i usystematyzować metody stosowane w pracy [H5] tak, aby w pełnej ogólności udowodnić, że pary odwzorowań ograniczających spełniają tezę hipotezy Leiningera-Margalita.

Opisana wyżej historia dowodu twierdzenia 1 z jednej strony bardzo dobrze ilustruje problemy jakie pojawiają, się gdy próbuje się uogólnić dobrze znane twierdzenia z przypadku orientowalnego na nieorientowalny. Z drugiej strony, badanie powierzchni nieorientowalnych dostarcza nowego punktu widzenia na powierzchnie orientowalne, czego dobrą ilustracją jest praca [H6]. Inny ciekawy przykład tego typu to praca [Sze10], w której B. Szepietowski skonstruował nietrywialne włożenia grupy warkoczy w grupę klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$ powierzchni orientowalnej S_g przechodząc po drodze przez powierzchnię nieorientowalną N_g.

4.3 Skręcenia Dehna jako generatory grup klas odwzorowań

Jak już wspominałem, skręcenia Dehna są generatorami grup klas odwzorowań w przypadku orientowalnym, ale jak zauważył Lickorish [Lic63], w przypadku nieorientowalnym skręcenia Dehna generują podgrupę $\mathcal{T}(N_g)$ indeksu 2 w $\mathcal{M}(N_g)$. Aby uzyskać pełen zbiór generatorów grupy $\mathcal{M}(N_g)$ Lickorish zdefiniował nowy rodzaj homeomorfizmu, tzw. *ślizg wstęgi Möbiusa* (ang. *crosscap slide* lub *Y-homeomorfizm*). Kilka lat później Chillingworth [Chi69], a potem Birman i Chillingworth [BC72] podali prosty skończony zbiór generatorów grupy $\mathcal{M}(N_g)$ składający się ze skręceń Dehna i jednego ślizgu wstęgi Möbiusa y. Ten zbiór generatorów był następnie rozszerzony przez Korkmaza [Kor02b] na przypadek grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g^n)$ powierzchni nieorientowalnej z nakłuciami, a następnie w pracy [P2] na przypadek grupy klas odwzorowań

sAw

$\mathcal{M}(N^n_{g,s})$ powierzchni z brzegiem, co będzie bardziej szczegółowo opisane w dalszej części autoreferatu.

Skręcenia Dehna generują podgrupę $\mathcal{T}(N_g)$ indeksu 2 w grupie $\mathcal{M}(N_g)$, a przypadku powierzchni z nakłuciami i brzegiem jest to podgrupa $\mathcal{T}(N^n_{g,s})$ indeksu $2^{n+1}n!$ w $\mathcal{M}(N^n_{g,s})$ ([H2], wniosek 6.4). Właśnie ten duży indeks jest głównym problemem technicznym utrudniającym wyznaczenie generatorów grupy $\mathcal{T}(N^n_{g,s})$ startując od generatorów grupy $\mathcal{M}(N^n_{g,s})$. Niemniej udało się uzyskać bardzo prosty zbiór generatorów grupy $\mathcal{T}(N^n_{g,s})$ ([H2], twierdzenie 6.2). Co ciekawe, pomimo dużego indeksu, otrzymany zbiór generatorów bardzo nieznacznie różni się od zbioru generatorów grupy $\mathcal{M}(N^n_{g,s})$ otrzymanego w [P2].

W drugiej części pracy [H2] zająłem się problemem wyznaczenia pierwszej grupy homologii (abelianizacji) grupy $\mathcal{T}(N^n_{g,s})$ ([H2], stwierdzenie 7.16 i twierdzenie 8.1). Tutaj trudność polegała na tym, że do dziś nie jest znane pełne przedstawienie grupy $\mathcal{T}(N^n_{g,s})$, a w momencie pisania pracy [H2] nie było znane przedstawienie nawet dla grupy $\mathcal{T}(N_g)$ (z wyjątkiem kilku trywialnych przypadków). Strategia wyznaczenia abelianizacji grupy G przy braku przedstawienia opiera się na odgadnięciu wyniku H a następnie udowodnieniu, że wszystkie generatory G są równoważne z generatorami H (modulo abelianizacja) oraz dowodzie nietrywialności generatorów i relacji definiujących H (poprzez konstrukcję odpowiednich ilorazów abelowych G).

Niezwykle ważnym osiągnięciem w badaniach grup klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnych było uzyskanie przez L. Parisa i B. Szepietowskiego [PS15] pełnego przedstawienia grupy $\mathcal{M}(N_g)$. Przedstawienie to jest dość proste, ale użyty w nim zbiór generatorów jest znacznie większy niż zbiór generatorów grupy $\mathcal{M}(N_g)$ znaleziony przez Chillingwortha [Chi69]. Wynika to z tego, że przedstawienie Parisa-Szepietowskiego ma strukturę produktu z amalgamacją odpowiadającemu dwóm różnym modelom topologicznym powierzchni N_g. W konsekwencji ich przedstawienie używa $g-1$ generatorów $u_1, u_2, \ldots, u_{g-1}$, które nie są skręceniami Dehna, a nawet więcej, nie są elementami grupy $\mathcal{T}(N_g)$ generowanej przez skręcenia Dehna. Elementy u_i to tzw. transpozycje wstęg Möbiusa (ang. *crosscap transposition*).

W pracy [H3] udało mi się uprościć przedstawienie Parisa-Szepietowskiego ([H3], twierdzenia 3.1 i 3.5) zastępując wszystkie generatory $u_1, \ldots, u_{g-1}$ jednym ślizgiem wstęgi Möbiusa y oraz *inwolucją hipereliptyczną* ϱ (która może być dość łatwo usunięta ze zbioru generatorów). W ten sposób otrzymane przedstawienie używa jako generatorów zbioru generatorów Chillingwortha. Co więcej, zmniejszenie liczby generatorów udało się przeprowadzić w taki sposób, że relacje definiujące nie uległy skomplikowaniu, a z pewnego punktu widzenia nawet uległy uproszczeniu. W szczególności, w drugiej części pracy [H3] udało nam się podać prostą interpretację geometryczną otrzymanych relacji ([H3], rozdział 4). Większość relacji powstaje w wyniku ślizgania wstęg Möbiusa po trzech krzywych zamkniętych α, β, γ takich, że $\gamma = \alpha \cdot \beta$.

Sama metodologia upraszczania przedstawienia Parisa-Szepietowskiego bardzo mocno opierała się na związku grupy warkoczy z grupą klas odwzorowań, w szczególności korzystałem z algebraicznych własności *podgrupy hipereliptycznej* $\mathcal{M}^h(N_g)$ grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$ otrzymanych w [P4].

Otrzymane przeze mnie przedstawienie grupy $\mathcal{M}(N_g)$ posłużyło między innymi za punkt wyjścia do bardzo ciekawych prac G. Omori oraz R. Kobayashi [Omo16, KO16], w których uzyskano nieorientowalne wersje przedstawienia typu Gervais [Ger96, Ger01] dla grup klas odwzorowań. Przedstawiania te charakteryzują się nieskończonym zbiorem generatorów oraz bardzo prostym relacjami.

Naturalną kontynuacją badań rozpoczętych w pracach [H2] i [H3] było wyznaczenie przedstawienia dla podgrupy $\mathcal{T}(N_g)$ skręceń Dehna. Oryginalne przedstawienie Parisa-Szepietowskiego jest pod tym względem bardzo problematyczne ze względu na $g-1$ generatorów $u_1, \ldots, u_{g-1}$, które nie są elementami $\mathcal{T}(N_g)$. Z tego powodu punktem wyjścia do otrzymania przedstawienia grupy $\mathcal{T}(N_g)$ było otrzymane wcześniej uproszczenie [H3] przedstawienia Parisa-Szepietowskiego, w

SAw

którym jest tylko jeden generator y nie należący do grupy skręceń $\mathcal{T}(N_g)$. Problem wyznaczenia przedstawienia dla grupy $\mathcal{T}(N_g)$ został rozwiązany w pracy [H4] (twierdzenie 3.1). Głównym wysiłkiem w tej pracy była próba otrzymania jak najprostszego przedstawienia i cel ten dość dobrze udało się zrealizować. Liczba nowych generatorów jest bardzo niewielka (od 3 do 7 w zależności od konkretnego przypadku) i nie zależy od rodzaju g powierzchni. Również liczba relacji nie uległa dużemu zwiększeniu, większość relacji wyprodukowanych przez algorytm Reidemeistera-Schreiera udało się wyeliminować. Podobnie jak w pracy [H3] podałem interpretację geometryczną otrzymanych relacji ([H4], rozdział 4). Z drugiej strony, otrzymane przedstawienie prawdopodobnie nadal nie jest optymalne (szczególnie dla małych wartości g) i jego uproszczenie będzie przedmiotem dalszych badań.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

Artykuły w czasopismach – przed uzyskaniem doktoratu

[D1] G. Gromadzki and M. Stukow. Involving symmetries of Riemann surfaces to a study of the mapping class group. *Publ. Mat.*, 48(1):103–106, 2004.

[D2] M. Stukow. The extended mapping class group is generated by 3 symmetries. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(5):403–406, 2004.

[D3] M. Stukow. Small torsion generating sets for hyperelliptic mapping class groups. *Topology Appl.*, 145(1–3):83–90, 2004.

[D4] M. Stukow. Conjugacy classes of finite subgroups of certain mapping class groups. *Turkish J. Math.*, 28(2):101–110, 2004.

Artykuły w czasopismach – po uzyskaniu doktoratu

[P1] M. Stukow. Commensurability of geometric subgroups of mapping class groups. *Geom. Dedicata*, 143:117–142, 2009.

[P2] M. Stukow. Generating mapping class groups of nonorientable surfaces with boundary. *Adv. Geom.*, 10(2):249–273, 2010.

[P3] M. Stukow. The first homology group of the mapping class group of a nonorientable surface with twisted coefficients. *Topology Appl.*, 178(1):417–437, 2014.

[P4] M. Stukow. A finite presentation for the hyperelliptic mapping class group of a nonrientable surface. *Osaka J. Math.*, 52(2):495–515, 2015.

[P5] M. Stukow. The hyperelliptic mapping class group of a nonorientable surface of genus $g \geqslant 4$ has a faithful representation into $\mathrm{GL}(g^2-1,\mathbb{R})$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 354(10):1029–1031, 2016.

[P6] A. Parlak and M. Stukow. Roots of crosscap slides and crosscap transpositions. arXiv:1601.06096 [math.GT], 2016.

[P7] A. Parlak and M. Stukow. Roots of Dehn twists on nonorientable surfaces. arXiv:1701.00531 [math.GT], 2017.

Zawartość wszystkich powyższych prac można podzielić na kilka zasadniczych tematów.

5.1 Generatory torsyjne grup klas odwzorowań

Specjalna rola elementów torsyjnych (skończonego rzędu) w grupach klas odwzorowań wynika z faktu, że każdy taki element może być zrealizowany jako automorfizm pewnej powierzchni Riemanna (lub Kleina w przypadku elementów zmieniających orientację). Jednym z pierwszych spektakularnych zastosowań elementów torsyjnych jako generatorów grup klas odwzorowań był dowód jednospójności przestrzeni moduli struktur powierzchni Riemanna na ustalonej powierzchni orientowalnej S_g [Mac71]. Dowód ten jest natychmiastową konsekwencją tego, że grupa klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$ jest generowana przez elementy skończonego rzędu. Do innych ciekawych rezultatów dotyczących generatorów grup klas odwzorowań dołączyły później twierdzenia o tym, że grupa $\mathcal{M}(S_g)$ jest generowana przez elementy rzędu 2 [MP87] oraz, że grupa ta może być wygenerowana przez dwa elementy [Waj96]. Wyniki te doprowadziły do naturalnych pytań o minimalne zbiory generatorów składające się z elementów skończonego rzędu. Ukazało się wiele prac poświęconych temu zagadnieniu [Luo00, Kas03, BF04, Sze04, Kor05, Sze06, Mon11a, Mon11b, Kor12, Du15, Du16], więc nie sposób ich wszystkich szczegółowo omówić, skoncentruję się więc jedynie na moich wynikach.

Pierwszą naszą obserwacją (wspólnie z G. Gromadzkim) było rozłożenie każdego z generatorów torsyjnych podanych przez Maclachlana [Mac71] jako produktu dwóch symetrii (tzn. zmieniających orientację inwolucji). Konsekwencją istnienia takich rozkładów był fakt, że rozszerzona grupa klas odwzorowań $\mathcal{M}^{\pm}(S_g)$ powierzchni orientowalnej S_g jest generowana przez symetrie ([D1], twierdzenie 1). Jako zastosowanie tej obserwacji udało nam się podać nowy dowód doskonałości grupy klas odwzorowań ([D1], wniosek 3). Praca [D1] jest ciekawa z punktu widzenia użytych w niej metod badawczych, które są połączeniem obserwacji topologicznych z metodami algebraicznymi teorii automorfizmów powierzchni Riemanna. Tego typu hybrydowe metody badawcze wydają się mieć duży potencjał i po raz kolejny zostały użyte np. w pracy [P7], co będzie bardziej szczegółowo opisane w podrozdziale 5.5.

W ramach dalszych badań udało mi się fakt generowania grupy $\mathcal{M}^{\pm}(S_g)$ przez symetrie znacznie wzmocnić i wykazać ([D2], twierdzenie 3.1), że grupa ta jest generowana przez trzy symetrie. Wiadomo, że $\mathcal{M}^{\pm}(S_g)$ nie jest grupą dihedralną, więc otrzymany zbiór generatorów jest minimalny.

Kolejnym rozpatrywanym przeze mnie zagadnieniem były minimalne torsyjne zbiory generatorów dla hipereliptycznej grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}^h(S_g)$ (elementy torsyjne w grupie $\mathcal{M}^h(S_g)$ odpowiadają automorfizmom hipereliptycznych powierzchni Riemanna). Udowodniłem między innymi, że każda z grup $\mathcal{M}^h(S_g)$ i $\mathcal{M}^{h\pm}(S_g)$ jest generowana przez dwa elementy skończonego rzędu ([D3], twierdzenia 1 i 5), grupa $\mathcal{M}^{h\pm}(S_g)$ jest generowana przez 3 symetrie ([D3], twierdzenie 9) oraz wykazałem, że inwolucje generują właściwą podgrupę grupy $\mathcal{M}^h(S_g)$ indeksu $2g+1$ lub $4g+2$ w zależności od parzystości g ([D3], twierdzenie 8).

5.2 Podgrupy geometryczne grup klas odwzorowań

Niech M będzie powierzchnią (orientowalną lub nieorientowalną). Bardzo naturalną klasą podgrup grup klas odwzorowań $\mathcal{M}(M)$ są tzw. *podgrupy geometryczne*, tzn. podgrupy $i_*(\mathcal{M}(N))$ indukowane przez włożenia $i\colon N \to M$ podpowierzchni [PR00]. W ramach moich badań [P1] zająłem się rozszerzeniem tego pojęcia na przypadek powierzchni nieorientowalnych oraz na przypadek podpowierzchni, które nie muszą być spójne. W szczególności:

- opisałem jądro homomorfizmu i_* ([P1], twierdzenie 3.6);
- opisałem podpowierzchnie N, dla których stowarzyszona podgrupa geometryczna $i_*(\mathcal{M}(N))$ jest wirtualnie abelowa ([P1], twierdzenie 5.1);
- podałem geometryczną i algebraiczną charakteryzację współmiernych (ang. *commensurable*) podgrup geometrycznych ([P1], twierdzenia 6.3, 7.1 i 7.3);
- podałem związek pomiędzy podgrupą współmierności (ang. *commensurator*) podgrupy geometrycznej, a stabilizatorem odpowiadającej tej podgrupie podpowierzchni ([P1], twierdzenia 8.3 i 8.4).

Powyższe wyniki pozwoliły mi również skonstruować dużą rodzinę nierównoważnych skończenie wymiarowych reprezentacji unitarnych grupy $\mathcal{M}(M)$ ([P1], wniosek 9.8), co stanowi rozszerzenie wyników uzyskanych przez L. Parisa w [Par02] na przypadek nieorientowalny.

5.3 Hipereliptyczne grupy klas odwzorowań

Bardzo ważną podgrupą grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$ jest tzw. *hipereliptyczna grupa klas odwzorowań* $\mathcal{M}^h(S_g)$. Jest kilka powodów jej dużego znaczenia:

- tak jak skończone podgrupy grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_g)$ odpowiadają grupom automorfizmów powierzchni Riemanna, tak skończone skończone podgrupy grupy $\mathcal{M}^h(S_g)$ odpowiadają grupom automorfizmów hipereliptycznych powierzchni Riemanna;
- grupa $\mathcal{M}^h(S_g)$ jest centralnym rozszerzeniem stopnia 2 grupy klas odwzorowań sfery z $2g+2$ nakłuciami, która to grupa jest bardzo blisko związana z grupą warkoczy;
- prawie wszystkie relacje w przedstawieniu [Waj83] grupy $\mathcal{M}(S_g)$ pochodzą z hipereliptycznej podgrupy $\mathcal{M}^h(S_g)$.

Po raz kolejny, ze względu na bogactwo literatury poświęconej hipereliptycznej grupie klas odwzorowań [BH71, Bir74, Coh93, Kaw97, AT00, Kor00, BB01, BCG01, Tan01, Mor03, AG07, Mor09, BCM13, BH15, BM15, BMP15] pominę szczegółowy opis tego zagadnienia i skoncentruję się na moich wynikach.

Punktem wyjścia do pracy [D4] było twierdzenie Harveya i Maclachlana mówiące o tym, że każdy element skończonego rzędu w grupie klas odwzorowań $\mathcal{M}(S_{0,r})$ sfery z r nakłuciami jest zawarty w maksymalnej grupie cyklicznej rzędu $r, r-1$ lub $r-2$, oraz że są 3 klasy sprzężoności takich maksymalnych podgrup cyklicznych. W pracy [D4] rozszerzyłem to twierdzenie i dla każdej podgrupy skończonej N grupy $\mathcal{M}(S_{0,r})$ wyznaczyłem maksymalną podgrupę skończoną M zawierającą N ([D4], twierdzenie 3). Co więcej, wyznaczyłem klasy sprzężoności takich maksymalnych podgrup skończonych M ([D4], wniosek 5). Bezpośrednią konsekwencją otrzymanych wyników są analogiczne rezultaty dla hipereliptycznej grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}^h(S_g)$ ([D4], twierdzenie 8). W szczególności wykazałem również, że jest co najwyżej 5 klas sprzężoności maksymalnych podgrup skończonych w $\mathcal{M}^h(S_g)$ ([D4], wniosek 9).

Jak już wspominałem, skończone podgrupy hipereliptycznej grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}^h(S_g)$ odpowiadają grupom automorfizmów hipereliptycznych powierzchni Riemanna. Jeżeli zamiast powierzchni Riemanna będziemy rozważać powierzchnie Kleina [AG71, BEG85, Nat90, BEGG90, BCG01, Nat04], to naturalne jest badanie hipereliptycznej grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}^h(N_g)$ powierzchni nieorientowalnej N_g. Praca [P4] jest poświęcona definicji oraz badaniom podstawowych własności tej grupy. Wyznaczyłem w tej pracy przedstawienie grupy $\mathcal{M}^h(N_g)$ ([P4], twierdzenie 4.1). Następnie, korzystając z tego przedstawienia, wyznaczyłem pierwszą grupę homologii $H_1(\mathcal{M}^h(N_g); H_1(N_g;\mathbb{Z}))$ o współczynnikach w pierwszej grupie homologii $H_1(N_g;\mathbb{Z})$ powierzchni N_g ([P4], twierdzenie 5.4).

Wśród różnych otwartych pytań dotyczących grup klas odwzorowań jednym z najstarszych jest pytanie o istnienie wiernej, skończenie wymiarowej reprezentacji liniowej grupy $\mathcal{M}(S_g)$. Analogiczne pytanie w przypadku grupy warkoczy uzyskało pozytywną odpowiedź dzięki wynikom D. Kramera [Kra00, Kra02] i S. Bigelowa [Big01]. W przypadku grup klas odwzorowań dostępne są tylko częściowe wyniki [Kor00, BHT01, BB01] i pozytywną odpowiedź znamy tylko w przypadku grup pokrewnych hipereliptycznej grupie klas odwzorowań $\mathcal{M}^h(S_g)$. W pracy [P5] rozszerzyłem te częściowe wyniki na przypadek hipereliptycznej grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}^h(N_g)$ powierzchni nieorientowalnej N_g ([P5], główne twierdzenie) i wykazałem, że grupa $\mathcal{M}^h(N_g)$, dla $g \geqslant 4$ ma wierną rzeczywistą reprezentację liniową wymiaru g^2-1.

5.4 Własności homologiczne grup klas odwzorowań

Badanie homologicznych własności grup klas odwzorowań ma bardzo długą historię [Mum67, Bir70, Bir71, Pow78, Har83, Har85, Har86, HZ86, Mor89a, Mor89b, Har91, Mor93, Kaw97, Kor98, Tan01, BCP01, Kor02a, BF02, KS03, MW07, RW08, Wah08, BCM13, IS15].

W ramach moich badań rozszerzyłem wyniki M. Korkmaza [Kor02b] i obliczyłem pierwszą grupę homologii (abelianizację) grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(N^n_{g,s})$ powierzchni nieorientowalnej $N^s_{g,n}$ z n nakłuciami i s składowymi brzegu ([P2], twierdzenie 6.22). Aby to zrobić wyznaczyłem najpierw zbiór generatorów grupy $\mathcal{M}(N^n_{g,s})$ ([P2], twierdzenia 5.2 i 5.3).

Krótko po ukazaniu się pierwszej wersji pracy [P2] (jako preprintu) N. Wahl zauważyła, że otrzymane przeze mnie wyniki są częściowo sprzeczne z rezultatami zawartymi w jej fundamentalnej pracy [Wah08] (wtedy mającej jeszcze status preprintu) poświęconej rozszerzeniu twierdzenia Madsena-Weissa [MW07] na przypadek nieorientowalny. Jak się później okazało (w wyniku prywatnej korespondencji z N. Wahl) przyczyną niezgodności był błąd w jednym z ciągów spektralnych użytych do dowodu homologicznej stabilności grup klas odwzorowań. Błąd ten został skorygowany w ostatecznej wersji pracy [Wah08].

Dwa kolejne wyniki homologiczne: obliczenie abelianizacji grupy skręceń $\mathcal{T}(N^n_{g,s})$ oraz obliczenie homologii skręconych hipereliptycznej grupy klas odwzorowań opisałem już wcześniej w podrozdziałach 4.3 i 5.3.

Najnowszym moim rezultatem homologicznym jest rozszerzenie wyniku S. Mority [Mor89b] na przypadek nieorientowalny. Obliczyłem pierwszą grupę homologii $H_1(\mathcal{M}(N_g); H_1(N_g;\mathbb{Z}))$ o współczynnikach w pierwszej grupie homologii $H_1(N_g;\mathbb{Z})$ powierzchni N_g ([P3], twierdzenie 1.1). Wynik ten udało się uzyskać w oparciu o uproszczone przedstawienie [H3] Parisa-Szepietowskiego [PS15] grupy klas odwzorowań $\mathcal{M}(N_g)$.

5.5 Pierwiastki z generatorów grup klas odwzorowań

Jak już wielokrotnie wspominałem, jednymi z najważniejszych elementów grup klas odwzorowań są skręcenia Dehna. Skręcenia Dehna względem rozłącznych krzywych generują wolne grupy abelowe, co jest punktem wyjścia do stosowania metod badawczych znanych z teorii grup liniowych do badania grup klas odwzorowań. Z tego punktu widzenia dość zaskakującą była obserwacja D. Margalita i S. Schleimera [MS09], że skręcenia Dehna posiadają pierwiastki.

W ramach naszych badań (wspólnie z moją magistrantką A. Parlak) zajmowaliśmy się tym samym pytaniem w przypadku generatorów grup klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnych. W szczególności podaliśmy pełną charakteryzację, kiedy istnieją pierwiastki (w grupie $\mathcal{M}(N_g)$) ze ślizgu oraz transpozycji wstęg Möbiusa ([P6], główne twierdzenie) oraz podaliśmy geometryczną konstrukcję takich pierwiastków.

W ramach dalszych badań podaliśmy taką samą charakteryzację dla skręceń Dehna na powierzchniach nieorientowalnych ([P7], twierdzenie 8) oraz sformułowaliśmy proste arytmetyczne warunki charakteryzujące wszystkie możliwe pierwiastki z ustalonego skręcenia Dehna względem krzywej nierozdzielającej ([P7], twierdzenie 7). Jak się okazuje, pierwiastki takie są blisko związane z działaniami skończonymi na powierzchniach (lub równoważnie z automorfizmami powierzchni Riemanna i Kleina) i dzięki temu możliwe jest ich badanie w stworzonym przez Thurstona języku orbifoldów. W przypadku orientowalnym wiadomo [MR10, Mon14], że maksymalny stopień pierwiastka w grupie $\mathcal{M}(S_g)$ ze skręcenia Dehna względem krzywej nierozdzielajacej jest równy $2g+1$. W przypadku nieorientowalnym odpowiedź na analogiczne pytanie jest o wiele bardziej skomplikowana i bardzo zależy od dzielników pierwszych rodzaju powierzchni g – twierdzenia 9 i 12 w [P7].

W drugiej części pracy [P7] podaliśmy szereg geometrycznych konstrukcji pierwiastków ze skręceń Dehna. W konstrukcjach tych kluczową rolę odgrywa tzw. relacja trójzębu ([P7], stwierdzenie 4), która jest wspólnym uogólnieniem klasycznych relacji łańcucha i gwiazdy.

Wyniki otrzymane w pracach [P6] i [P7] stanowią naturalną kontynuację badań rozpoczętych w pracach [BP08, MS09, MR10, Raj13, Mon14].

Stukow

[AG71] N. L. Alling and N. Greenleaf. *Foundations of the Theory of Klein Surfaces*, volume 219 of *Lecture Notes in Math.* Springer–Verlag, 1971.

[AG07] S. Anan'in and E. C. B. Gonçalves. A hyperelliptic view on Teichmüller space. I. arXiv:0709.1711v2 [math.GT], 2007.

[Art26] E. Artin. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 4:47–72, 1926.

[Art47] E. Artin. Theory of braids. *Ann. of Math.*, 48:101–126, 1947.

[AS14] F. Atalan and B. Szepietowski. Automorphisms of the mapping class group of a nonorientable surface. arXiv:1403.2774v2 [math.GT], 2014.

[AT00] K. Ahara and M. Takasawa. Conjugacy classes of the hyperelliptic mapping class group of genus 2 and 3. *Experiment. Math.*, 9(3):383–396, 2000.

[Aur05] D. Auroux. A stable classification of Lefschetz fibrations. *Geom. Topol.*, 9:203–217, 2005.

[BB01] S. J. Bigelow and R. D. Budney. The mapping class group of a genus two surface is linear. *Algebr. Geom. Topol.*, 1:699–708, 2001.

[BB05] J. S. Birman and T. E. Brendle. Braids: A survey. In W. Menasco and M. Thistlethwaite, editors, *Handbook of Knot Theory*, pages 19–104, 2005.

[BC72] J. S. Birman and D. R. J. Chillingworth. On the homeotopy group of a non–orientable surface. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 71:437–448, 1972.

[BCCS10] E. Bujalance, F. J. Cirre, M. D. E. Conder, and B. Szepietowski. Finite group actions on bordered surfaces of small genus. *J. Pure Appl. Algebra*, 214(12):2165–2185, 2010.

[BCG01] E. Bujalance, A. F. Costa, and J. M. Gamboa. The hyperelliptic mapping class group of Klein surfaces. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 44(2):351–363, 2001.

[BCM12] J. F. Brock, R. D. Canary, and Y. N. Minsky. The classification of Kleinian surface groups, II: The Ending Lamination Conjecture. *Ann. of Math.*, 176(1):1–149, 2012.

[BCM13] T. E. Brendle, L. Childers, and D. Margalit. Cohomology of the hyperelliptic Torelli group. *Israel J. Math.*, 195(2):613–630, 2013.

[BCP01] C. F. Bödigheimer, F. R. Cohen, and M. D. Peim. Mapping class groups and function spaces. In *Homotopy Methods in Algebraic Topology*, volume 271 of *Contemp. Math.*, pages 17–39, 2001. Proc. Conf., Boulder, 1999.

[BEG85] E. Bujalance, J. J. Etayo, and J. M. Gamboa. Hyperelliptic Klein surfaces. *Quart. J. Math. Oxford*, 36(2):141–157, 1985.

[BEGG90] E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, and G. Gromadzki. *Automorphism groups of Compact Bordered Klein Surfaces; A Combinatorial Approach*, volume 1439 of *Lecture Notes in Math.* Springer–Verlag, 1990.

[Bel08] P. Bellingeri. On automorphisms of surface braid groups. *J. Knot Theory Ramifications*, 17(1):1–11, 2008.

[BEMS15] E. Bujalance, J. J. Etayo, E. Martinez, and B. Szepietowski. On the connectedness of the branch loci of non-orientable unbordered Klein surfaces of low genus. *Glasgow Math. J.*, 57(1):211–230, 2015.

[Ben01] S. Benvenuti. Finite presentations for the mapping class group via the ordered complex of curves. *Adv. Geom.*, 1(3):291–321, 2001.

[BF02] M. Bestvina and K. Fujiwara. Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups. *Geom. Topol.*, 6:69–89, 2002.

[BF04] T. E. Brendle and B. Farb. Every mapping class group is generated by 6 involutions. *J. Algebra*, 278(1):187–198, 2004.

[BH71] J. S. Birman and H. M. Hilden. On mapping class groups of closed surfaces as covering spaces. In *Advances in the theory of Riemann surfaces*, number 66 in Ann. of Math. Studies, pages 81–115. Princeton Univ. Press, 1971. Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969.

SAubw

[BH15] R. I. Baykur and K. Hayano. Broken Lefschetz fibrations and mapping class groups. *Geom. Topol. Monogr.*, 19:269–290, 2015.

[BHT01] T. E. Brendle and H. Hamidi-Tehrani. On the linearity problem for mapping class groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 1(2):445–468, 2001.

[Big01] S. J. Bigelow. Braid groups are linear. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(2):471–486, 2001.

[Bir69] J. S. Birman. Mapping class groups and their relationship to braid group. *Comm. Pure Appl. Math.*, 22:213–238, 1969.

[Bir70] J. S. Birman. Abelian quotiens of the mapping class group of a 2-manifold. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76(1):147–150, 1970.

[Bir71] J. S. Birman. Errata: Abelian quotiens of the mapping class group of a 2-manifold. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77:479, 1971.

[Bir74] J. S. Birman. *Braids, Links, and Mapping Class Groups.* Number 82 in Ann. of Math. Studies. Princeton Univ. Press, 1974.

[BKMM12] J. A. Behrstock, B. Kleiner, Y. N. Minsky, and L. Mosher. Geometry and rigidity of mapping class groups. *Geom. Topol.*, 16:781–888, 2012.

[BLM83] J. S. Birman, A. Lubotzky, and J. McCarthy. Abelian and solvable subgroups of the mapping class group. *Duke Math. J.*, 50(4):1107–1120, 1983.

[BM06] R. W. Bell and D. Margalit. Braid groups and the co-Hopfian property. *J. Algebra*, 303(1):275–294, 2006.

[BM08] J. A. Behrstock and Y. N. Minsky. Dimension and rank for mapping class groups. *Ann. of Math.*, 167:1055–1077, 2008.

[BM15] T. E. Brendle and D. Margalit. Factoring in the hyperelliptic Torelli group. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 159(2):207–217, 2015.

[BMHM14] R. I. Baykur, N. Monden, and J. V. Horn-Morris. Positive factorizations of mapping classes. arXiv:1412.0352v2 [math.GT], 2014.

[BMP15] T. E. Brendle, D. Margalit, and A. Putman. Generators for the hyperelliptic Torelli group and the kernel of the Burau representation at $t = -1$. *Invent. Math.*, 200(1):263–310, 2015.

[BP08] C. Bonatti and L. Paris. Roots in the mapping class groups. *Proc. London Math. Soc.*, 98(2):471–503, 2008.

[BS99] P. Buser and M. Seppälä. Real structures of Teichmüller spaces, Dehn twists, and moduli spaces of real curves. *Math. Z.*, 232:547–558, 1999.

[BV95] M. R. Bridson and K. Vogtmann. On the geometry of the automorphism group of a free group. *Bull. London Math. Soc.*, 27:544–552, 1995.

[BV06] M. R. Bridson and K. Vogtmann. Automorphism groups of free groups, surface groups and free abelian groups. In *Problems on Mapping Class Groups And Related Topics*, volume 74, pages 301–316, 2006. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics.

[Cas16] F. Castel. *Geometric representations of the braid groups*, volume 378 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, 2016.

[CB89] A. J. Casson and S. A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston.* Number 9 in London Math. Soc. Stud. Texts. Cambridge Univ. Press, 1989.

[Chi69] D. R. J. Chillingworth. A finite set of generators for the homeotopy group of a non–orientable surface. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 65:409–430, 1969.

[Coh93] F. R. Cohen. On the mapping class groups for punctured spheres, the hyperelliptic mapping class groups, $SO(3)$, and $Spin^c(3)$. *Am. J. Math.*, 115(2):389–434, 1993.

[CR12] M. M. Campisi and M. Rathbun. High distance knots in closed 3-manifolds. *J. Knot Theory Ramifications*, 21(2):1250017, 20 pp., 2012.

Sdulu

[Deh38] M. Dehn. Die Gruppe der Abbildungsklassen. *Acta Math.*, 69(1):135–206, 1938.

[Deh87] M. Dehn. *Papers on group thory and topology.* Springer–Verlag, 1987. Translated from the German and introduced by John Stillwell.

[DKP15] E. Dalyan, M. Korkmaz, and M. Pamuk. Arbitrarily long factorizations in mapping class groups. *Int. Math. Res. Notices*, 19:9400–9414, 2015.

[Don99] S. K. Donaldson. Lefschetz pencils on symplectic manifolds. *J. Differential Geom.*, 53(2):205–236, 1999.

[Du15] X. Du. Generating the mapping class groups with torsions. arXiv:1506.04396v1 [math.GT], 2015.

[Du16] X. Du. The extended mapping class group can be generated by two torsions. arXiv:1607.04030v1 [math.GT], 2016.

[EKK+02] H. Endo, M. Korkmaz, D. Kotschick, B. Ozbagci, and A. I. Stipsicz. Commutators, Lefschetz fibrations and the signatures of surface bundles. *Topology*, 41:961–977, 2002.

[Eps66] D. B. A. Epstein. Curves on 2–manifolds and isotopies. *Acta Math.*, 115:83–107, 1966.

[Etn06] J. B. Etnyre. Lectures on open book decompositions and contact structures. In *Floer homology, gauge theory, and low-dimensional topology*, number 5 in Clay Math. Proc., pages 103–141. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[FLP79] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poénaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces, Séminaire Orsay*, volume 66–67 of *Astérisque*. Soc. Math. de France, 1979.

[Ger96] S. Gervais. Presentation and central extensions of mapping class groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(8):3097–3132, 1996.

[Ger01] S. Gervais. A finite presentation of the mapping class group of a punctured surface. *Topology*, 40:703–725, 2001.

[GG04] D. L. Gonçalves and J. Guaschi. On the structure of surface pure braid groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 186(1):33–64, 2004.

[Gir02] E. Giroux. Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing, 2002)*, volume 2, pages 405–414. Higher Ed. Press, 2002.

[GP05] S. Gadgil and D. Pancholi. Homeomorphisms and the homology of non–orientable surfaces. *Proc. Indian Acad. Sci.*, 115(3):251–257, 2005.

[GS99] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz. *4-Manifolds and Kirby Calculus*, volume 20 of *Grad. Stud. in Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Gur04] Y. Z. Gurtas. Positive Dehn twist expressions for some new involutions in mapping class group. arXiv:math.GT/0404310v1, 2004.

[GVB68] R. Gillette and J. Van Buskirk. The word problem and consequences for the braid groups and mapping-class groups of the 2-sphere. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 131:277–296, 1968.

[Har66] W. J. Harvey. Cyclic group of automorphisms of compact Riemann surface. *Quart. J. Math. Oxford*, 17(2):86–97, 1966.

[Har83] J. L. Harer. The second homology group of the mapping class group of an orientable surface. *Invent. Math.*, 72(2):221–239, 1983.

[Har85] J. L. Harer. Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces. *Ann. of Math.*, 121(2):215–249, 1985.

[Har86] J. L. Harer. The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface. *Invent. Math.*, 84(1):157–176, 1986.

[Har91] J. L. Harer. The third homology group of the moduli space of curves. *Duke Math. J.*, 63(1):25–55, 1991.

Stukow

[Hir02] S. Hirose. A complex of curves and a presentation for the mapping class group of a surface. *Osaka J. Math.*, 39(4):795–820, 2002.

[HK15] S. Hirose and R. Kobayashi. A normal generating set for the Torelli group of a non-orientable closed surface. arXiv:math.GT/1412.2222v2, 2015.

[HT80] A. Hatcher and W. P. Thurston. A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface. *Topology*, 19:221–237, 1980.

[HZ86] J. L. Harer and D. Zaiger. The Euler characteristic of the moduli space of curves. *Invent. Math.*, 85(3):457–485, 1986.

[IIM00] E. Irmak, N. Ivanov, and J. McCarthy. Automorphisms of surface braid groups. arXiv:math.GT/0306069v1, 2000.

[IM99] N. V. Ivanov and J. D. McCarthy. On injective homomorphisms between Teichmüller modular groups I. *Invent. Math.*, 135(2):425–486, 1999.

[Irm06] E. Irmak. Complexes of nonseparating curves and mapping class groups. *Michigan Math. J.*, 54(1):81–110, 2006.

[Irm14] E. Irmak. On simplicial maps of the complexes of curves of nonorientable surfaces. *Algebr. Geom. Topol.*, 14:1153–1180, 2014.

[IS15] T. Ishida and M. Sato. A twisted first homology group of the handlebody mapping class group. arXiv:1502.07048v1 [math.GT], 2015.

[Ish96] A. Ishida. The structure of subgroups of mapping class groups generated by two Dehn twists. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 72(10):240–241, 1996.

[Iva88] N. V. Ivanov. *Automorphisms of Teichmüller modular groups*, pages 199–270. Number 1346 in Lecture Notes in Math. Springer–Verlag, 1988.

[Joh79] D. L. Johnson. Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 75(1):119–125, 1979.

[Joh83a] D. L. Johnson. The structure of the Torelli group I: A finite set of generators for $\mathcal{I}$. *Ann. of Math.*, 118(3):423–442, 1983.

[Joh83b] D. L. Johnson. A survey of the Torelli group,. In *Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981)*, volume 20 of *Contemp. Math.*, pages 165–179. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[JR13] J. Johnson and H. Rubinstein. Mapping class groups of Heegaard splitings. *J. Knot Theory Ramifications*, 22(5):1350018, 2013.

[Kap10] M. Kapovich. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups.* Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel, 2010.

[Kas03] M. Kassabov. Generating mapping class groups by involutions. arXiv:math.GT/0311455v1, 2003.

[Kaw97] N. Kawazumi. Homology of hyperelliptic mapping class groups for surfaces. *Topology Appl.*, 76:203–216, 1997.

[Ker80] S. P. Kerckhoff. The Nielsen realization problem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2:452–454, 1980.

[Ker83] S. P. Kerckhoff. The Nielsen realization problem. *Ann. of Math.*, 117(2):235–265, 1983.

[KO16] R. Kobayashi and G. Omori. An infinite presentation for the mapping class group of a non-orientable surface with boundary. arXiv:1610.04999v1 [math.GT], 2016.

[Kor98] M. Korkmaz. First homology group of mapping class groups of nonorientable surfaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 123(3):487–499, 1998.

[Kor00] M. Korkmaz. On the linearity of certain mapping class groups. *Turkish J. Math.*, 24(4):367–371, 2000.

[Kor02a] M. Korkmaz. Low–dimensional homology groups of mapping class groups: a survey. *Turkish J. Math.*, 26(1):101–114, 2002.

Stuke

[Kor02b] M. Korkmaz. Mapping class groups of nonorientable surfaces. *Geom. Dedicata*, 89:109–133, 2002.

[Kor04] M. Korkmaz. Stable commutator length of a Dehn twist. *Michigan Math. J.*, 52(1):23–31, 2004.

[Kor05] M. Korkmaz. Generating the surface mapping class group by two elements. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(8):3299–3310, 2005.

[Kor12] M. Korkmaz. Minimal generating sets for the mapping class group. In A. Papadopoulos, editor, *Handbook of Teichmüller theory. Vol. III*, pages 441–463. Eur. Math. Soc., Zürich, 2012.

[Kra00] D. Kramer. The braid group B_4 is linear. *Invent. Math.*, 142(3):451–486, 2000.

[Kra02] D. Kramer. Braid groups are linear. *Ann. of Math.*, 155(1):131–156, 2002.

[KS03] M. Korkmaz and A. Stipsicz. The second homology groups of mapping class groups of orientable surfaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 134:479–489, 2003.

[KS09] M. Korkmaz and A. Stipsicz. Lefschetz fibrations on 4–manifolds. In A. Papadopoulos, editor, *Handbook of Teichmüller theory. Vol. II*, pages 271–296. Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.

[Lic62] W. B. R. Lickorish. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Ann. of Math.*, 76:531–540, 1962.

[Lic63] W. B. R. Lickorish. Homeomorphisms of non–orientable two–manifolds. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 59:307–317, 1963.

[Lic64] W. B. R. Lickorish. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 60:769–778, 1964.

[LM10] C. J. Leininger and D. Margalit. Two–generator subgroups of the pure braid group. *Geom. Dedicata*, 147(1):107–113, 2010.

[LP01] C. Labruère and L. Paris. Presentations for the punctured mapping class groups in terms of Artin groups. *Algebr. Geom. Topol.*, 1:73–114, 2001.

[Luo00] F. Luo. Torsion elements in the mapping class group of a surface. arXiv:math.GT/0004048v1, 2000.

[Mac71] C. Maclachlan. Modulus space is simply-connected. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 29(1):85–86, 1971.

[Mat10] M. Matsumoto. A presentation of mapping class groups in terms of Artin groups and geometric monodromy of singularities. *Math. Ann.*, 316(3):401–418, 2010.

[Min10] Y. N. Minsky. The classification of Kleinian surface groups, I: models and bounds. *Ann. of Math.*, 171(1):1–107, 2010.

[MM99] H. A. Masur and Y. N. Minsky. Geometry of the complex of curves I: Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138(1):103–149, 1999.

[MMS12] H. Masur, L. Mosher, and S. Schleimer. On train-track splitting sequences. *Duke Math. J.*, 161(9):1613–1656, 2012.

[Mon11a] N. Monden. Generating the mapping class group of a punctured surface by involutions. *Tokyo J. of Math.*, 34(2):303–312, 2011.

[Mon11b] N. Monden. The mapping class group of a punctured surface is generated by three elements. *Hiroshima Math. J.*, 41:1–9, 2011.

[Mon14] N. Monden. On roots of Dehn twists. *Rocky Mountain J. Math.*, 44(3):987–1001, 2014.

[Mor89a] S. Morita. Casons's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles I. *Topology*, 28(3):305–323, 1989.

[Mor89b] S. Morita. Families of Jacobian manifolds and characteristic classes of surface boundles I. *Ann. Inst. Fourier*, 39:777–810, 1989.

Stuhler

[Mor91] S. Morita. Mapping class groups of surfaces and three–dimensional manifolds. In *Proceedings of the Internasional Congress of Mathematicians, Vol I, II (Kyoto, 1990)*, pages 665–674. Math. Soc. Japan, 1991.

[Mor93] S. Morita. The structure of the mapping class group and characteristic classes of surface bundles. In C.-F. Bödigheimer and R. Hain, editors, *Mapping class groups and moduli of Riemann surfaces*, number 150 in Contemp. Math., pages 303–315, 1993.

[Mor03] T. Morifuji. On Meyer's function of hyperelliptic mapping class groups. *J. Math. Soc. Japan*, 55(1):117–129, 2003.

[Mor09] T. Morifuji. On a secondary invariant of the hyperelliptic mapping class group. *Banach Center Publ.*, 85(1):83–92, 2009.

[MP87] J. McCarthy and A. Papadopoulos. Involutions in surface mapping class groups. *Enseign. Math.*, 33(3–4):275–290, 1987.

[MR10] D. McCullough and K. Rajeevsarathy. Roots of Dehn twists. *Geom. Dedicata*, 151(1):397–409, 2010.

[MS09] D. Margalit and S. Schleimer. Dehn twists have roots. *Geom. Topol.*, 13(3):1495–1497, 2009.

[Mum67] D. Mumford. Abelian quotients of the Teichmüller modular group. *J. Analyse Math.*, 18:227–244, 1967.

[MW07] I. Madsen and M. S. Weiss. The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford's conjecture. *Ann. of Math.*, 165(3):843–941, 2007.

[Nam07] H. Namazi. Big Heegaard distance implies finite mapping class group. *Topology Appl.*, 154(16):2939–2949, 2007.

[Nat90] S. M. Natanzon. Klein surfaces. *Russ. Math. Surv.*, 45(6):53–108, 1990.

[Nat04] S. M. Natanzon. *Moduli of Riemann surfaces, real algebraic curves, and their superanalogs*, volume 225 of *Translations of Mathematical Monographs*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[Nie27] J. Nielsen. Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I. *Acta Math.*, 50:189–358, 1927.

[Nie29] J. Nielsen. Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen II. *Acta Math.*, 53:1–76, 1929.

[Nie32] J. Nielsen. Untersuchungen zur Theorie der geschlossenen zweiseitigen Flächen III. *Acta Math.*, 58:87–167, 1932.

[Omo16] G. Omori. An infinite presentation for the mapping class group of a non-orientable surface. arXiv:math.GT/1601.01416v2, 2016.

[Par01] L. Paris. The solution to a conjecture of Tits on the subgroup generated by the squares of the generators of an artin group. *Invent. Math.*, 145:19–36, 2001.

[Par02] L. Paris. Actions and irreducible representations of the mapping class group. *Math. Ann.*, 322:301–315, 2002.

[PHM10] O. Plamenevskaya and J. V. Horn-Morris. Planar open books, monodromy factorizations and symplectic fillings. *Geom. Topol.*, 14:2077–2101, 2010.

[PM04] U. Pinkal and J. D. McCarthy. Representing homology automorphisms of nonorientable surfaces. Max Planc Inst. preprint MPI/SFB 85-11. Available at `http://www.math.msu.edu/~mccarthy`, 2004.

[Pow78] J. Powell. Two theorems on the mapping class group of a surface. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 68(3):347–350, 1978.

[PP13] A. Papadopoulos and R. C. Penner. Hyperbolic metrics, measured foliations and pants decompositions for non-orientable surfaces. arXiv:math.GT/1309.0383v3, 2013.

chMw

[PR00] L. Paris and D. Rolfsen. Geometric subgroups of mapping class groups. *J. Reine Angew. Math.*, 521:47–83, 2000.

[PS15] L. Paris and B. Szepietowski. A presentation for the mapping class group of a nonorientable surface. *Bull. Soc. Math. France.*, 143:503–566, 2015.

[PV96] B. Perron and J. P. Vannier. Groupe de monodromie géométrique des singularités simples. *Math. Ann.*, 306(1):231–245, 1996.

[Raj13] K. Rajeevsarathy. Roots of Dehn twists about separating curves. *J. Aust. Math. Soc.*, 95(2):266–288, 2013.

[Roy71] H. L. Royden. Automorphisms and isometries of Teichmüler space. In *Advances in the theory of Riemann surfaces*, number 66 in Ann. of Math. Studies, pages 369–383. Princeton Univ. Press, 1971. Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969.

[RW08] O. Randal-Williams. The homology of the stable nonorientable mapping class group. *Algebr. Geom. Topol.*, 8(4):1811–1832, 2008.

[Sch82] M. Scharlemann. The complex of curves on non-orientable surfaces. *J. London Math. Soc.*, 25(2):171–184, 1982.

[Sze04] B. Szepietowski. Involutions in mapping class groups of nonorientable surfaces. *Collect. Math.*, 55(3):253–260, 2004.

[Sze06] B. Szepietowski. The mapping class group of a nonorientable surface is generated by three elements and by four involutions. *Geom. Dedicata*, 117:1–9, 2006.

[Sze10] B. Szepietowski. Embedding the braid group in mapping class groups. *Publ. Mat.*, 54:359–368, 2010.

[Tak95] M. Takahashi. On the generators of the mapping class group of a 3-dimensional handlebody. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 71(9):213–214, 1995.

[Tan01] A. Tanaka. The first homology group of the hyperelliptic mapping class group with twisted coefficients. *Topology Appl.*, 115:19–42, 2001.

[Thu76] W. P. Thurston. The geometry and topology of three–manifolds. Notes form Princeton University, Stony Brook, 1976.

[Thu88] W. P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 19(2):417–431, 1988.

[Vog02] K. Vogtmann. Automorphisms of free groups and outer space. *Geom. Dedicata*, 94(1):1–31, 2002.

[Wah08] N. Wahl. Homological stability for the mapping class groups of non-orientable surfaces. *Invent. Math.*, 171:389–424, 2008.

[Waj83] B. Wajnryb. A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface. *Israel J. Math.*, 45(2–3):157–174, 1983.

[Waj96] B. Wajnryb. Mapping class group of a surface is generated by two elements. *Topology*, 35(2):377–383, 1996.

[Waj98] B. Wajnryb. Mapping class group of a handlebody. *Fund. Math.*, 158:195–228, 1998.

[Waj99] B. Wajnryb. Artin groups and geometric monodromy. *Invent. Math.*, 138:563–571, 1999.

[Wan90] S. Wang. Maximum orders of periodic maps on closed surfaces. *Topology Appl.*, 41:255–262, 1990.

[Zei81] H. Zeischang. *Finite groups of mapping classes of surfaces.* Number 875 in Lecture Notes in Math. Springer–Verlag, 1981.