Łódź, dn. 3 kwietnia 2018 r.

dr hab. Szymon Głąb
Instytut Matematyki
Politechnika Łódzka

**Recenzja pracy doktorskiej Pana mgra Jacka Tryby pt. „Analityczne własności ideałów"**

Rozprawa zawiera rozważania dotyczące własności ideałów podzbiorów liczb naturalnych oraz ideałowej zbieżności. Choć Autor rozważa różne ideały, to znaczna część pracy poświęcona jest ideałom gęstościowym, czyli ideałom mającym definicje lub własności zbliżone do klasycznego ideału zbiorów gęstości zero.

Pierwszy rozdział pracy zawiera spis podstawowych pojęć, definicji i faktów używanych w dalszych rozdziałach.

Rozdział drugi rozprawy poświęcony jest rozważaniom nad jednorodnością ideałów. Pierwszy podrozdział rozdziału drugiego wydaje się nie mieć wiele wspólnego z jednorodnością ideałów. Ten związek ujawni się później. Tymczasem Autor wspólnie w promotorem rozważają czetry własności Bolzano-Weierstrassa, które przysługują parom $(X, \mathcal{I})$ składającym się z przestrzeni topologicznej $X$ oraz ideału $\mathcal{I}$. Gdy $\mathcal{I}$ jest ideałem zbiorów skończonych, to własność Bolzano-Weierstrassa odpowiada ciągowej zwartości – tzn. z każdego ciągu można wybrać podciąg zbieżny. Własność ta była wprowadzona w 2007 roku przez Filipówa, Mrożka, Recława i Szucę, a dalej badana przez Filipówa. Głównym wynik tej części pracy brzmi następująco. Jeśli $\mathcal{I}$ to ideał van der Wardena lub ideał Hindmana a $X$ jest przestrzenią Hausdorffa, to własność Bolzano-Weierstrassa dla $(X, \mathcal{I})$ implikuje, silniejszą, dziedziczną własność Bolzano-Weierstrassa.

W drugim podrozdziale rozdziału drugiego rozważane są ideały jednorodne. Ta część to wspólne wyniki uzyskane z promotorem pomocniczym. Wykazują oni, że jeśli ideał $\mathcal{I}$ jest słabo jednorodny, to własność Bolzano-Weierstrassa dla $(X, \mathcal{I})$ implikuje dziedziczną własność Bolzano-Weierstrassa dla tej pary. Następnie Autor rozprawy pisze, że dowody wyników z poprzedniego podrozdziału w rzeczywistości pokazują, że ideały van der Wardena i Hindmana są słabo jednorodne. Z jednej strony wyjaśnia to, dlaczego w rozdziale o jednorodności znalazły się rozważania z pierwszego podrozdziału, ale z drugiej strony pokazują, że struktura pracy nie jest do końca przemyślana. W pierwszym podrozdziale Autor powinien wykazać, że ideały van der Wardena i Hindmana są słabo jednorodne, a dopiero z tego wywnioskować, że dla nich własność Bolzano-Weierstrassa implikuje dziedziczną własność Bolzano-Weierstrassa. W dalszej części tego podrozdziału wykazane zostaje, że każdy ideał słabo jednorodny jest jednorodny, co pozwala odpowiedzieć na pewne pytanie z doktoratu Meza-Alcántary.



Sz. Głąb

Kolejny podrozdział rozdziału drugiego daje odpowiedź na 3 z 4 pytań postawionych w pracy mojej, Marka Balcerzaka i Jarosława Swaczyny. Problemy dotyczyły funkcji ideałowo niezmienniczych. Z oczywistych względów ta część pracy jest dla mnie bardzo interesująca.

W rozdziale trzecim Autor rozważa najpierw własności prostych ideałów gęstościowych. Zostały one wprowadzone w pracy Balcerzaka, Dasa, Filipczak i Swaczyny. Ta część rozważań pochodzi z pracy wspólnej Autora rozprawy, jego promotora pomocniczego, Michała Popławskiego i Jarosława Swaczyny. Dowiadujemy się, kiedy proste ideały gęstości są ideałami Erdösa-Ulama oraz, że istnieje continuum wiele prostych ideałów gęstości, z których żadne dwa nie dają się porównać w porządku Katetova. Dalsza część rozdziału trzeciego składa się z rozważań zawartych w samodzielnej pracy Autora rozprawy. Dotyczą one ideałów ważonej gęstości jednostajnej $\mathcal{I}_c$. Autor wykazuje, że znany w literaturze warunek $U^m$ jest krytyczny dla pewnych własności ideałów $\mathcal{I}_c$ oraz ważonej gęstości jednostajnej $u_c$. Dokładniej – następujące warunki są równoważne:

1. ciąg $c$ spełnia $U^m$;

2. $\mathcal{I}_c$ jest gęsty;

3. $\mathcal{I}_c$ nie ma własności Bolzano-Weierstrassa;

4. gęstość $u_c$ ma własność Darboux;

5. gęstość $u_c$ przyjmuje inne wartości niż 0 i 1.

Dalej Autor pokazuje, że jeśli $c$ jest ciągiem nierosnącym spełniającym $U^m$, to $\mathcal{I}_c$ jest znanym ideałem $\mathcal{I}_u$ jednostajnej gęstości zero.

Ostatni czwarty rozdział zatytułowany *Gęstości podzbiorów liczb naturalnych* składa się z wyników opublikowanych przez Autora w kolejnej samodzielnej pracy. Pierwsza połowa rozdziału dotyczy podzbiorów liczb naturalnych o jednorodnej dystrybucji. Pokazane zostało, że hipoteza Giuloano, Grekosa i Miška z roku 2010 nie jest prawdziwa. Dalej Autor pokazuje w twierdzeniu 4.1.11, że hipoteza jest prawdziwa, o ile dolna gęstość rozważanego zbioru jest niezerowa. W końcu potwierdzona zostaje kolejna hipoteza powyższych autorów, mówiąca o tym, że zbiór o jednorodnej dystrybucji $X$ ma zerową miarę nieregularności $\eta(X) = 0$ dystrybucji elementów $X$. W dalszej części zostają rozwiązane kolejne problemy Giuloano, Grekosa i Miška; mają one jednak mocno techniczny charakter i nie będę ich tutaj opisywał.

Zatrzymam się na chwilę nad przykładem 4.2.10. Autor konstruuje indukcyjnie zbiór $A$. W tym celu definiuje liczby dodatnie $\varepsilon_i$ za pomocą wzoru $(1+\varepsilon_i)^{10^i} = \frac{10}{9}$ oraz liczby naturalne $n_i$ spełniające warunek $n_i(1+\varepsilon_i) > 4\cdot 10^i$. Nic nie stoi na przeszkodzie by przyjąć $n_i = 4\cdot 10^i$. Dalej przedział $(n_i, n_i\frac{10}{9}]$ dzielony jest na $10^i$ podprzedziałów parami rozłącznych $I^i_m$, $m \leq 10^i$. Zbiór $A$ jest konstruowany w taki sposób, że na każdym przedziale $I^i_m$ regularnie są rozmieszczone



Sz. Głąb

elementy, w taki sposób, że $A(I^i_m)/|I^i_m|$ to około $1 - m/n_i$. Problem polega na tym, że na każdy z przedziałów $I^i_m$ przypada średnio około $0,44$ elementów. Aby cała konstrukcja miała sens liczby $n_i$ muszą być znacznie większe niż $4 \cdot 10^i$.

Rozprawa jest złączeniem wyników z różnych prac Autora. Napisanie tej rozprawy w znacznym stopniu polegało na przetłumaczeniu artykułów z angielskiego na polski, poukładaniu ich w rozdziały i podrozdziały, oraz napisaniu wstępu i rozdziału z podstawowymi oznaczeniami. Gdyby nieco wydłużyć wstęp mógłby on być autoreferatem dla spiętych prac. Taka zszywka prac wraz z autoreferatem spełnia wymogi prawne rozprawy doktorskiej. Od rozprawy oczekujemy pewnego uporządkowania wyników, a nie podania ich tak jak są w artykułach. Mam krytyczne zdanie także na temat pisania rozprawy doktorskiej z matematyki w języku polskim, gdyż ogranicza się w ten sposób zasięg jej oddziaływania. W Polsce tematyka rozprawy może zainteresować kilkanaście, może kilkadziesiąt osób, tymczasem na świecie być może kilkaset. Dla przykładu Autor korzysta z doktoratu Meza-Alcántary napisanego w Meksyku po angielsku (nie hiszpańsku).

Miałem chwilami trudność z czytaniem dowodów. Autor nadużywa określeń, że coś jest *jasne*, *oczywiste* lub *łatwo widać*. Wiele wyjaśnień jest mocno skrótowych. Dla przykładu na stronie 29 uzasadnienie równoważności (*) jest zdawkowe. Potrzebowałem trochę nad tym posiedzieć z kartką i trochę poszacować zanim przekonałem się, że to prawda. W tym przypadku wystarczyło trochę dodatkowych oszacowań i kilka słów tłumaczenia. Wolałbym czytać półtora razy dłuższą rozprawę, w której każde rozumowanie jest dobrze opisane, niż zastanawiać się nad co trzecim zdaniem. Szczęśliwie w prawie każdym miejscu, gdzie miałem wątpliwości, dałem radę je rozwiać. Jednak praca zawiera dziesiątki twierdzeń i przykładów, więc ze względu na rozmiar pracy i czas na jej zrecenzowanie (taki, jaki czasopisma dają na recenzję 15-20 stronicowego artykułu), nie byłem w stanie przebrnąć przez wszystkie rozważania i do końca zrozumieć niektóre przykłady. Gdybym dostał artykuł do recenzji w tej postaci, to zażądał bym więcej szczegółów i wyjaśnień, lepszego wprowadzenia do tematyki i opisu zawartych wyników, dodania tabel lub diagramów pokazujących związki między pojęciami, implikacje między własnościami, przypomnienia czasami definicji, którą się wprowadziło 10 stron wcześniej itp. Ja w swojej praktyce czytam napisany tekst wielokrotnie, czasami po dłuższych przerwach i gdy natrafiam na coś, co kiedyś napisałem, a czego teraz nie widzę od razu, to staram się to rozpisać, tak by ostateczna wersja była przyjazna do czytania. W ten sposób przy okazji uzyskuję pewność, co do poprawności wyników.

Z obowiązku recenzenta wspomnę o kilku błędach literowych:
str. 11 – w definicji ideału $\mathcal{EU}_f$ zamiast $\lim_{n\to\infty} \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)}$ powinno być $\lim_{n\to\infty} \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} = 0$.
str. 57 – w definicji *zbioru funkcji dystrybucji* po słowach *składający się z punktów skupienia ciągu funkcyjnego* brakuje „$(F(X_n, x)))_{n\in\mathbb{N}}$".
str. 59 – W dowodzie twierdzenia 4.1.11 liczba $\gamma$ jest definiowana jako $d_{x_n}(X)$, a powinna być



Sz. GT06

jako odwrotność tej liczby.

Dotychczas skupiłem się na krytycznej analizie zawartości rozprawy doktorskiej Pana mgra Jacka Tryby. Teraz czas na podkreślenie mocnych stron tego doktoratu. Autor odpowiada na wiele wiele problemów postawionych przez innych matematyków (w tym przeze mnie). Choć dowody nie używają wyrafinowanego aparatu pojęciowego, to są oparte na sprytnych konstrukcjach. Potrafi zarówno współpracować z innymi, jak i pracować samodzielnie. Do najciekawszych wyników rozprawy zaliczam

– twierdzenie 2.2.11 oraz płynące z niego wnioski;
– podrozdział 2.3, w którym Autor rozwiązuje problemy z mojej pracy;
– twierdzenia z podrozdziału 3.2 mówiące o warunkach równoważnych $U^m$;
– zaskakujący wniosek 3.2.21 z twierdzenia 3.2.19.

Uważam, że Autor ma znaczne szanse na dalszą owocną karierę naukową i uzyskanie w przyszłości stopnia doktora habilitowanego. Uwagi krytyczne zawarte w tej recenzji nie mają wpływu na moją pozytywną ocenę omawianej pracy. Uważam że spełnia ona kryteria stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej Autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Gdy pierwszy raz przejrzałem rozprawę Jacka Tryby, byłem przekonany, że zasługuje ona na wyróżnienie ze względu na rozwiązanie wielu problemów postawionych przez innych matematyków. Z czasem, gdy ze znacznym trudem przebijałem się przez kolejne dowody i miałem dosyć dalszego czytania, zastanawiałem się, czy moje pierwsze wrażenie było słuszne. Jednak po głębszym przemyśleniu doszedłem do wniosku, że tak. Rozumowania, choć napisane mało przyjaźnie, okazywały się być poprawne. Na 72 stronicową pracę znalazłem jeden błąd (być może usuwalny) w mało znaczącym przykładzie pod koniec rozprawy. Nie zmniejsza to jej wartości poznawczej. Wnioskuję o wyróżnienie doktoratu mgra Jacka Tryby.

03.04.2018

Szymon Głąb