Wrocław, 27 marca 2018r.

Recenzja pracy doktorskiej mgr. Jacka Tryby

Praca doktorska mgr. Jacka Tryby dotyczy problemów związanych z ideałami na zbiorze liczb naturalnych, w szczególności tzw. ideałami gęstościowymi. Wyniki uzyskane przez autora zostały zawarte w dwóch samodzielnych artykułach (przyjętych do druku w *Journal of Number Theory* i *Math. Slovaca*) oraz trzech wspólnych (w tym dwa z nich zostały już opublikowane: jeden w *Acta Math. Hungarica*, drugi w *Topology and its Applications*).

1 Rozdział 1

W pierwszym rozdziale autor rozważa rodziny jednorodności ideałów. Pojęcie to było wcześniej badane przez Fremlina, Hrušaka i Meza-Alcantarę, choć zawsze w dość konkretnych kontekstach. Najważniejszym rezultatem tego rozdziału wydaje się być ten, mówiący, że rodziny jednorodności ideałów są zawsze zamknięte na nadzbiory. Sam jego dowód nie jest bardzo skomplikowany i opiera się właściwie na dowodzie twierdzenia Cantora-Bernsteina. Trzeba jednak było sporej wyobraźni, żeby w ogóle pomyśleć, że takie twierdzenie może być prawdziwe! Intuicja podpowiada bowiem, że suma zbioru z rodziny jednorodności i spoza tej rodziny zazwyczaj powinna być spoza rodziny jednorodności. Rezultat ten jest nie tyle nieoczekiwany, ale i bardzo użyteczny. Jego konsekwencją jest m. in. równoważność pojęcia ideału słabo jednorodnego (wprowadzonego przez Hrušaka i Meza-Alcantarę) i ideału jednorodnego. Autor używa go też, by odpowiedzieć na pewne pytania Hrušaka i Meza-Alcantary, zaś w twierdzeniu 2.2.19 w błyskotliwy sposób używa go do konstrukcji pewnego ideału antyjednorodnego.

W dalszej części tego rozdziału autor odpowiada na pytania zadane w pracy Balcerzaka, Głąba i Swaczyny związane z tzw. funkcjami ideałowo niezmienniczymi. Jest to dość efektowna część pracy. Autorowi udało się bowiem podać charakteryzacje pojęć rozważanych w rzeczonych pracach i trzeba przyznać, że charakteryzacje te wyglądają zazwyczaj zgrabniej niż oryginalne sformułowania.

Na końcu autor podaje charakteryzację rodziny jednorodności ideału asymptotycznej gęstości zero.

Moje wątpliwości budzi układ tego rozdziału, który wydaje się być raczej *chronologiczny* niż *logiczny*. Wydaje mi się, że należało pokazać, że ideały van der Waerdena i Hindmana są jednorodne (i, dzięki odpowiedniemu twierdzeniu, spełniają odpowiednie własności związane ze zbieżnością ideałową).

Czasami nie do końca rozumiałem motywację niektórych rezultatów. Przykład 2.3.6 to konstrukcja pewnego ideału nie spełniającego warunku (C1), o którym to warunku wiemy, że nie spełniają go niegłówne ideały maksymalne. Być może autor chciał podać przykład, który jest dość daleko od bycia maksymalnym, ale wykazanie braku (C1) w tym przypadku jest dość zawiłe i można mieć wątpliwości, czy warte tego rezultatu. Jeszcze większe wątpliwości budzi twierdzenie 2.3.14 czyli przykład ideału Erdösa-Ulama niespełniającego pewnego warunku (C2). Dowód tego twierdzenia czyta się nader trudno, a w lekturze nie pomaga powracające pytanie, dlaczego ten przykład miałby być ważny. Być może jest, ale autor nie próbuje do tego przekonać czytelnika.

Wydaje mi się, że charakteryzacja rodziny jednorodności ideału asymptotycznej gęstości zero jest jednym z najciekawszych wyników pracy. Została ona jednak podana właściwie mimochodem, przy okazji rozważań nad, w moim odczuciu, mniej ciekawymi pytaniami. Co więcej, w samej pracy autor nie podał charakteryzacji rodziny jednorodności ideału sumowalnego (chociaż, jak mi wspomniał, znał ją), co jest o tyle dziwne, że jak się okazuje są to te same rodziny i jest to sam w sobie dość intrygujący rezultat.

Na koniec, jeszcze drobna uwaga dotycząca dowodu twierdzenia 2.3.28. Polega on właściwie na znalezieniu zbioru $A \subseteq \omega$ takiego, że $d^*(A) > 0$, ale dla każdego B takiego, że $d_*(B) > 0$ mamy $d_*(B \setminus A) > 0$. Myślę, że istnienie takiego zbioru było znane, a w każdym razie można podać nieco krótszy dowód jego istnienia niż ten z pracy.

Powyższe zarzuty nie zmieniają mojej bardzo dobrej oceny tego rozdziału: zawiera on bardzo ciekawe wyniki i pomysłowe dowody.

2 Rozdział 2

Rozdział ten dzieli się naturalnie na dwa podrozdziały. W pierwszym autor rozważa tzw. proste ideały gęstościowe, a więc pewne uogólnienie ideału asymptotycznej gęstości zero wprowadzone przez łódzkich matematyków. Druga część rozdziału poświęcona jest z kolei uogólnieniu ideału gęstości jednostajnej.

2.1 Proste ideały gęstościowe.

W skrócie, proste ideały gęstościowe są definiowane podobnie jak ideał asymptotycznej gęstości zero, tyle, że z pewną funkcją jako parametrem. Autor rozważa pytanie, ile zasadniczo różnych funkcji może indukować ten sam ideał. Okazuje się, że zachodzi tu pewna dychotomia: ideały albo są indukowane przez (zasadniczo) jedną funkcję albo przez $\mathfrak{c}$ wiele. W twierdzeniu 3.1.7 autor charakteryzuje ideały indukowane przez jedną funkcję zadając warunek na ową indukującą funkcję. Warunek ten mówi, że funkcja nie może za szybko rosnąć, choć dokładna postać warunku jest dość techniczna. Dowód charakteryzacji jest pomysłowy. Drugim wartym odnotowania rezultatem tej części drugiego rozdziału jest twierdzenie 3.1.11. Jest to znaczne wzmocnienie twierdzenia Balcerzaka, Dasa, Filipczak i Swaczyny mówiącego, że istnieje $\mathfrak{c}$ parami różnych prostych ideałów gęstościowych. Autor udowodnił, że istnieje $\mathfrak{c}$ prostych ideałów gęstościowych, które nie są porównywalne w sensie Katetova. Choć idea dowodu jest zasadniczo taka sama, jak dowodu twierdzenia Balcerzaka i innych, autor musiał pokonać znacznie większe trudności techniczne. Jest to o tyle ciekawy wynik, że, o ile mi wiadomo, wcześniej badano podobne problemy jedynie dla ideałów sumowalnych (np. Meza-Alcantara udowodnił, że $(\mathcal{P}(\omega), \subseteq^*)$ zanurza się w porządek ideałów borelowskich z relacją $\leq_K$, ale obraz tego zanurzenia zawierał się w rodzinie ideałów sumowalnych). Trzeba też powiedzieć, że porównywalność w sensie Katetova jest w pewnym sensie znacznie istotniejsza niż izomorfizm ideałów. Uogólnienie miało więc sens.

2.2 Ideały ważonej gęstości jednostajnej.

Ważona gęstość jednostajna została wprowadzona Antoniniego i Grekosa i polega na sparametryzowaniu gęstości jednostajnej (Banacha) poprzez przypisanie liczbom naturalnym wag. Autor bada warunek U^m takiego ciągu wag (wprowadzony w pracy Mačaja, Sleziaka i Tomy) i pokazuje, jak przekłada się on na własności ideału zbiorów ważonej gęstości jednostajnej zero. Okazuje się, że ideały ważonej gęstości spełniającej U^m są dość porządne, podczas gdy te definiowane przez gęstość ważoną niespełniającą U^m nie są gęste. Następnie autor pokazuje, że ideał ważonej gęstości jednostajnej zero, zadany przez gęstość monotoniczną spełniającą warunek U^m jest równy ideałowi gęstości jednostajnej. Uważam to za najbardziej wartościowy rezultat tej części rozdziału 2, właściwie zamykający temat ideałów ważonej gęstości jednostajnej. Rozdział kończy się jeszcze odpowiedzią na pytanie zadane przez Mačaja, Sleziaka i Tomę. Autor pokazuje, że gęstość ważona spełnia własność Darboux wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia własność U^m (i, co zabawne, wtedy i tylko wtedy, gdy gęstość ta przyjmuje w ogóle jakieś wartości poza 0 i 1). Dowód opiera się na dość sprytnym pomyśle.

3 Rozdział 3

Rozdział ten składa się właściwie wyłącznie z odpowiedzi na pytania postawione przez Giuliano, Grekosa i Mišika w pracy *Open problems on densities II.* W szczególności autor obala szereg hipotez sformułowanych w tej pracy. Hipotezy te dotyczą m. in. pewnych dość technicznych charakteryzacji własności funkcji dystrybucji. W dalszej części rozdziału autor zajmuje się pytaniami dotyczącymi tzw. zbiorów gęstości, podaje m. in. zgrabną charakteryzację, kiedy zbiory gęstości są maksymalne i obala kolejne hipotezy Giuliano, Grekosa i Mišika. W końcu rozważa problem, jak bardzo niezależne od siebie są gęstości asymptotyczne, jednostajne i logarytmiczne. Rozdział ten oceniam jako najsłabszy z całej rozprawy. Niektóre dowody są błędne (np. konstrukcja w przykładzie 4.2.10 załamuje się przy definiowaniu zbioru A na przedziałach I_m^k przez wadliwą definicję ciągu (ε_k), przedziały (J_n) są źle zdefiniowane w dowodzie twierdzenia 4.3.1), niektóre (np. fragmenty dowodu twierdzenia 4.1.12) napisane pod mniejszym rygorem formalnym niż w poprzednich rozdziałach. Niektóre rezultaty są dość ciekawe (np. ten o niezależności różnych rodzajów gęstości), ale niektóre - zwłaszcza te związane z hipotezami Grekosa - już mniej. Po pierwsze dlatego, że rozważane pytania są niekiedy techniczne. Po drugie, wydaje się, że większość z tych pytań nie była bardzo trudna. Konstrukcje przeprowadzone przez autora w tym rozdziale są znacznie *lżejsze* niż w rozdziałach poprzednich.

4 Uwagi ogólne

4.1 Strona formalna pracy

Rozprawa jest napisana ładną polszczyzną, pomijając pojawiające się od czasu do czasu niezręczności (polegające zazwyczaj na przestawionym szyku zdania) i kolokwializmy, w tym jeden nagminny, a przez to denerwujący, polegający na używaniu słowa „jak" zamiast „jeśli" (np. „jak $A \in H(\mathcal{I})$ $(\ldots)$, to $B \in H(\mathcal{I})$" na stronie 20) Autor nie ustrzegł się literówek, choć muszę przyznać, że znalazłem ich bardzo mało. Wymienię część z nich, aby nie być gołosłownym, ale też, żeby pokazać, że są one naprawdę drobne i nie prowadzą do nieporozumień.

- brak „$= 0$" w definicji ideału Erdösa-Ulama zarówno na stronie 11 jak i 27,
- brak znaku silni w paru miejscach dowodu twierdzenia 3.1.11 (np. w definicji D_{k_i}),
- „twierdzenie" zamiast „twierdzenia" w dowodzie twierdzenia 3.2.12,
- w paru miejscach autor użył złego kroju (np. N zamiast $\mathbb{N}$ na stronie 42, $\mathcal{I}_k$ zamiast I_k na stronie 35),
- brak „dla prawie wszystkich n" po „$B(k_n) > \alpha k_n$" na stronie 35,
- „przypomnijmy" zamiast "Przypomnijmy" na stronie 44,
- zły nawias przy definicji ciągu (a_n) na stronie 52,
- „$x - \min I\alpha$" zamiast „$(x - \min I)\alpha$" w definicji regularnego rozmieszczenia na stronie 56.

4.2 Wyniki autora w kontekście wyników innych autorów

Liczba pytań, zadanych w różnych pracach naukowych (i na seminariach), na które odpowiedział w swojej rozprawie, mgr Jacek Tryba jest imponująca (gwoli ścisłości naliczyłem ich czternaście). Należy dodać, że są wśród nich pytania zadane przez nietuzinkowych matematyków, takich, jak m. in. Michal Hrušak i Meza-Alcantara, być może największych dziś na świecie

specjalistów od teorii analitycznych P-ideałów na ω, Marek Balcerzak i Szymon Głąb, od wielu lat badających tematykę ideałów gęstości i mający ważne wyniki w tej dziedzinie czy, wreszcie, mniej mi znany Georges Grekos, który tematyką gęstości wydaje się zajmować nieustannie od ponad czterdziestu lat.
Trudno o lepsze potwierdzenie matematycznej klasy doktoranta niż umiejętność rozwiązywania problemów otwartych zadanych przez wybitnych specjalistów.
To, że na rozprawę doktorską składają się w zasadzie głównie odpowiedzi na problemy otwarte, chwilami staje się jednak też jej słabością. Nie wszystkie rozważane problemy były może warte zachodu. Czasem miałem wrażenie, że gdyby autor, zamiast zabierać się za rozwiązanie kolejnego opublikowanego problemu, spróbował poszukać własnych problemów badawczych byłoby to z pożytkiem dla rozprawy. Wątki warte rozwinięcia pojawiały się zwłaszcza w rozdziale 1 (np. badanie rodzin jednorodności innych klasycznych ideałów, pojęcie rosnącej niezmienniczości).

4.3 Rozumowania

To, co uderza czytając rozprawę to sprawność kombinatoryczno-rachunkowa autora. Jest to specyficzna cecha teorii ideałów na ω, zwłaszcza tych ideałów, które bliskie są ideałom gęstości, że wiele dowodów wymaga oszacowań i rachunków czasem ocierających się o teorię liczb. W rozprawie oszacowania te są nieraz bardzo delikatne, wymagające odpowiednich intuicji i precyzji. Autor nie odcina kuponów od swoich pomysłów. Chociaż wiele konstrukcji przedstawionych w pracy wygląda na pozór podobnie (np. parę konstrukcji wykorzystuje następujące po sobie przedziały I_n długości $n!$), to podobieństwo to jest powierzchowne i właściwie w każdym dowodzie ważniejszych rezultatów pojawiają się nowe pomysły. Właśnie ta liczba niełatwych pomysłów jest największą siłą pracy. Znalazła ona odzwierciedlenie w liczbie publikacji, które powstały na podstawie wyników zwartych w rozprawie doktorskiej (pięć publikacji, z czego cztery zostały już przyjęte do druku lub opublikowane).
Zarzut, który można tu postawić, to ograniczony aparat pojęciowy. Rozumowania, choć niełatwe, w dużej części polegają na szacowaniu granic górnych i dolnych pewnych ciągów. Autor oczywiście użył takich metod, jakie akurat były potrzebne i skoro były one skuteczne, to trudno mu zarzucać, że nie użył innych. Zabrakło mi próby zastosowania osiągniętych rezultatów poza samą teorią ideałów (jak autor słusznie pisze we wstępie, ideały gęstościowe pojawiają się w wielu różnych działach matematyki).

4.4 Ekspozycja rezultatów i rozumowań

Dowody są poprawne, nie wychwyciłem większych luk, błędów czy nieścisłości (poza wpadkami w ostatnim rozdziale). Muszę przyznać, że nie zawsze rozumowania te czytało się łatwo. Wielokrotnie sprawdzenie poprawności dowodu pochłaniało mi niemało czasu, a i tak nie zawsze byłem w stanie uchwycić ideę, która za nim stała. Wynikało to przede wszystkim z faktu, że były to niełatwe rozumowania, ale też po części z pewnej lakoniczności autora, która mniej by może przeszkadzała w artykule publikowanym w czasopismie, natomiast nieco razi w pracy doktorskiej. Czasem pomogłoby dodanie paru mniej formalnych zdań wyjaśniających np. ogólną ideę danej konstrukcji.
W niektórych momentach inaczej postawiłbym akcenty - czasem ciekawsze rezultaty są nieco schowane za nieco mniej ciekawymi. Niekiedy brakowało mi też wyjaśnienia, dlaczego autor uważa dany rezultat za ważny.

5 Podsumowanie

Mgr. Tryba rozważa ciekawe zagadnienia, rozwiązuje cały szereg problemów zadanych przez uznanych specjalistów, wykazując się bardzo solidnym warsztatem, matematyczną intuicją i należytą ścisłością. Praca zawiera wiele nietrywialnych pomysłów i pogłębia naszą wiedzę na temat ideałów na ω, a w szczególności na temat ideałów gęstościowych. Zarzuty zawarte w mojej recenzji rzucają nikły cień na blaski zalet pracy i nie wpływają na moją bardzo pozytywną ocenę. Uważam pracę doktorską mgr. Tryby za **bardzo dobrą**, bez cienia wątpliwości spełniającą wszystkie wymagania dotyczące rozpraw doktorskich w obowiązujących przepisach i wnoszę o dopuszczenie do jej publicznej obrony.

Piotr Borodulin-Nadzieja

Piotr Borodulin-Nadzieja