Prof. dr hab. Maciej M. Sysło
Wydział Matematyki i Instytut Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
ul. Chopina 12/18; 87-100 Toruń

tel. 0-604515777; syslo@mat.umk.pl; http://mmsyslo.pl

Toruń: 20.01.2017 r.

R e c e n z j a

rozprawy doktorskiej Pani mgr inż. Moniki ROSICKIEJ
pt. *Permutation Graphs and Their Properties*

Opiniowana praca jest poświęcona **grafom permutacyjnym** (ang. *permutation graphs*).

Zacznę jednak od *dygresji*. Jako „dinozaura" wśród badaczy teorii grafów, zaskoczyły już pierwsze akapity pracy, a dokładniej – pojęcie grafu permutacyjnego. Otóż „klasyczna" definicja grafu permutacyjnego pochodzi z początków lat 70' XX wieku. Jest to graf o zbiorze wierzchołków {1, 2, 3, ..., *n*}, dla którego istnieje permutacja π liczb z tego zbioru taka, że {*i*, *j*} jest krawędzią, jeśli większa z liczb *i* oraz *j* stoi w permutacji π na lewo od mniejszej. Grafy permutacyjne w tym sensie mają wiele ciekawych i ważnych zastosowań jako grafy przecięć skojarzeń czy modele sortowania z najmniejszą liczbą kolejek i powiązań z innymi klasami grafów, na przykład z grafami doskonałymi. Więcej klasycznych rezultatów można znaleźć w książce M. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York 1980, a nowsze – są cytowane np. w haśle *permutation graphs* w Wikipedii. Autorka opiniowanej dysertacji nie wspomina jednak o tej innej definicji grafów permutacyjnych.

Graf permutacyjny w tej pracy, to graf otrzymany z innego grafu (lub grafów) z wykorzystaniem permutacji.

W skład pracy wchodzi Wstęp, poprzedzony streszczeniami po polsku i po angielsku, oraz 4 rozdziały. Wstęp jest bardzo zwięzłym opisem zawartości pracy z naciskiem na uzyskane rezultaty. Rozdział 1 przynosi podstawowe definicje i oznaczenia z teorii grafów i na końcu – dotyczące permutacji. Trzy zasadnicze rozdziały pracy dotyczą grafów permutacyjnych, z tym, że Rozdziały 2 i 3 są poświęcone zagadnieniom dominowania, a ostatni rozdział – grafom z oznakowanymi krawędziami i wierzchołkami. W tym ostatnim rozdziale pojawiają się tylko szczególnej postaci grafy permutacyjne, rozważane zagadnienia zaś nie dotyczą dominowania.

Rozdział 2 dotyczy **pryzm**, czyli grafów pryzmowych, i zawiera jeden z zasadniczych rezultatów pracy – odpowiedź na przypuszczenie Mynhardt i Xu z 2009 roku. Pryzmę otrzymuje się z dowolnego grafu *G* i permutacji π przez utworzenie dwóch egzemplarzy grafu *G* i połączenie ich wierzchołków skojarzeniem wyznaczonym przez permutację π. Przypuszczenie Mynhardt i Xu dotyczy liczby dominacji w pryzmach, czyli najmniejszej liczby wierzchołków w grafie, które dominują wszystkie wierzchołki grafu. Na ogół ta liczba jest większa dla pryzmy grafu *G* niż dla *G*. Ciekawym pytaniem jest więc, kiedy liczba dominacji dla pryzmy grafu *G* jest taka sama jak dla grafu *G* i to dla każdej permutacji π. Mynhardt i Xu przypuszczali, że poza oczywistym przypadkiem grafu bez krawędzi nie ma innego takiego grafu, i nie pomylili się. Kilka szczególnych przypadków zostało rozstrzygniętych wcześniej, m.in. przez Autorkę dysertacji dla grafów z C_3-wolnymi wierzchołkami (praca [15]). Ten szczególny przypadek grafów jest znacznie prostszy do rozstrzygnięcia i słusznie poprzedza w pracy (p. 2.2) przypadek dowolnego grafu (p. 2.3). Niemal w tym samym czasie (w roku 2014) przypuszczenie Mynhardt i Xu zostało rozstrzygnięte niezależnie przez K. Wash. Dowód Autorki ma tę przewagę na dowodem Wash, że jest dowodem konstrukcyjnym – dla dowolnego grafu G, który zawiera przynajmniej jedną krawędź, budowana jest permutacja π, dla której liczba dominacji pryzmy grafu G jest większa od liczby dominacji grafu G. W dowodzie Autorka wykorzystała niektóre fakty, wcześniej podane przez autorów hipotezy, jednak sama idea dowodu jest osiągnięciem Autorki. To dość żmudny, ale i pomysłowy dowód konstrukcji pryzmy dla danego grafu G, która ma liczbę dominacji większą od liczby dominacji grafu G. Zapewne lekturę tego dowodu ułatwiłaby ilustracja dla grafu, dla którego nie znikają żadne konstruowane w dowodzie zbiory, grafy i permutacje – samodzielne utworzenie pełnej takiej ilustracji to ponad siły recenzenta.

Tutaj rodzi się dygresja: ileż zachodu wymagało wykazanie, że wprowadzone pojęcie – *a universal fixer* – nie jest spełnione przez żaden graf z wyjątkiem grafu bez krawędzi! To oczywiście nie umniejsza znaczenia tego rezultatu w pracy i wysiłku Autorki.

W końcowej części Rozdziału 2 Autorka rozważa szczególne warianty zbiorów dominujących i liczb dominacji w pryzmach. Część wyników, m.in. dotyczących wypukłej dominacji, Autorka uzyskała wspólnie z R. Zuazua (praca [10]). Analiza kontrprzykładów pod koniec rozdziału ilustruje, że nierówności (oszacowania) prawdziwe dla zwykłej dominacji nie przenoszą się na wypukłą dominację dla pryzm.

Rozdział 3 jest poświęcony zagadnieniom dominacji w grafach permutacyjnych, które są wspólnym uogólnieniem pryzm i iloczynu kartezjańskiego grafów. Te grafy nie były wcześniej szeroko badane poza ich określeniem w 1995 roku. Autorka wprowadza w tym rozdziale dodatkowe rodzaje dominacji (zbiorów, funkcji, liczb), dominację ułamkową. Rezultaty w tej części pracy mają głównie charakter oszacowań (Twierdzenie 27). W szczególności, wyniki w tej części pracy odnoszą się do iloczynu kartezjańskiego grafów (Obserwacja 30), jako szczególnego przypadku rozważanych grafów permutacyjnych. Dla tych grafów znane jest przypuszczenie Vizinga z 1963 roku, według którego liczba dominacji iloczynu kartezjańskiego dwóch grafów jest większa lub równa iloczynowi liczb dominacji tych grafów. Autorka komentuje to przypuszczenie swoimi wynikami, ale nie jest jasne, w jakim stopniu prowadzi to do określenia istotnie nowych klas grafów, i jakich, dla których przypuszczenie Vizinga jest prawdziwe.

Rozdział 4 jest poświęcony szczególnym rodzinom grafów **oznakowanych** lub **poetykietowanych** (ang. *labeled graphs*). W takich grafach, krawędzie są etykietowane permutacjami liczb $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, a wierzchołki – liczbami z tego zbioru. Za **zgodne** oznakowanie wierzchołków grafu uznaje się takie, dla którego obrazem etykiety jednego końca krawędzi w permutacji, będącej etykietą tej krawędzi, jest etykieta drugiego jej końca, dla każdej krawędzi grafu. Liczba sprzeczności grafu oznakowanego określa najmniejszą liczbę krawędzi, które nie są zgodne, po wszystkich oznakowaniach wierzchołków. Autorka wykorzystuje specjalny rodzaj grafów permutacyjnych wprowadzonych w Rozdziale 3. Bada najmniejszą liczbę sprzeczności oraz liczbę możliwych oznakowani bez sprzeczności. To zagadnienie, w szczególnym przypadku $n = 2$, było przedmiotem badań jednego z ojców teorii grafów, Franka Harary'ego w 1953 roku, pod nazwą równoważenie grafów oznakowanych (ang. *signed graphs balancing*) – ten szczególny przypadek problemu wyrósł w socjologii. Autorka zaś skupiła swoją uwagę na przygotowaniu gruntu do wykorzystania grafów oznakowanych w teorii informacji kwantowej – oryginalne prace z tego zakresu ([14] i [16]) powstały w zespole naukowców uznawanych za światowych ekspertów w tej dziedzinie. Nie znam się na tej teorii, ale z dużym zainteresowaniem śledziłem, jak kombinatoryka, a w szczególności dość zaawansowana teoria grafów, znajduje zastosowania w tak, zdawać by się mogło, odległej dziedzinie, jak fizyka kwantowa, nie tylko jako (graficzna) ilustracja, ale jako narzędzie badań. Tę część pracy również, obok wyniku z Rozdziału 2, oceniam bardzo wysoko.

Praca jest przejrzyście skomponowana i zredagowana, co było dość trudnym zadaniem przy tak rozbudowanej terminologii i mnogości konstrukcji. Drobne potknięcia językowe (w angielskim) nie utrudniały lektury. Widziałbym jednak szansę na poprawienie czytelności. Jak na pracę z teorii grafów, praca jest dość oszczędna w ilustracje, które znacznie ułatwiłyby lekturę, zwłaszcza komuś, jak recenzent, który nie prowadzi badań dokładnie w tym dziale teorii grafów. Jak wspomniałem powyżej, taka ilustracja byłaby bardzo pomocna przy śledzeniu szczegółów dowodu głównego wyniku z Rozdziału 2.

Redakcyjnie, niezbyt szczęśliwym, bo mało widocznym, wyróżnieniem jest druk terminów definiowanych pismem prostym w tekście złożonym pismem pochyłym – wyróżnienie pismem półgrubym ułatwiłoby wielokrotne odwoływanie się do definicji, co było nieuchronne.

Drobne wątpliwości: (1) W Twierdzeniu 7 nie jest chyba potrzebne założenie, że graf G nie jest bez krawędzi, bo przecież zawiera nie izolowany wierzchołek C_3-wolny. Podobnie jest na początku dowodu tego twierdzenia i być może w innych miejscach. (2) W Definicjach 31 i 32 i być może w innych miejscach, A jako podzbiór wierzchołków nie może zawierać najkrótszych dróg, definiowanych jako ciągi wierzchołków i krawędzi, tylko ich wierzchołki. Inne drobiazgi pomijam.

Biorąc pod uwagę wszystkie aspekty opiniowanej pracy w konkluzji stwierdzam, że rozprawa doktorska Pani mgr inż. Moniki Rosickiej pt. *Permutation Graphs and Their Properties* zdecydowanie spełnia ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie Autorki do dalszego toku przewodu doktorskiego.

Prof. dr hab. Maciej M. Sysło