dr hab. Piotr Bartłomiejczyk, prof. PG
Instytut Matematyki Stosowanej
WFTiMS PG
email: piobartl@pg.edu.pl

Gdańsk, 15 października 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Pawła Barbarskiego *Różne uogólnienia i zastosowania twierdzenia Szarkowskiego o współwystępowaniu orbit okresowych odwzorowań ciągłych*

Recenzowana rozprawa doktorska została przygotowana na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego. Promotorem jest dr hab. Piotr Szuca, prof. UG, a promotorem pomocniczym dr Nikodem Mrożek. Rozprawa została przedstawiona w formie spójnego tematycznie zbioru trzech publikacji (wszystkich opublikowanych, dwóch samodzielnych i jednej współautorskiej):

[A] Paweł Barbarski, *The Sharkovskiĭ theorem for spaces of measurable functions*, J. Math. Anal. Appl. **373** (2011), no. 2, 414–421. (70 punktów na liście MEiN)

[B] Jan Andres and Paweł Barbarski, *Randomized Sharkovsky-type results and random subharmonic solutions of differential inclusions*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 5, 1971–1983. (100 punktów na liście MEiN)

[C] Paweł Barbarski, *Continuous functions in rings generated by a single Darboux function*, Real Anal. Exchange **46** (2021), no. 1, 83–98. (40 punktów na liście MEiN)

Zbiór artykułów został poprzedzony:

1. dwoma jednostronicowymi abstraktami w języku polskim i angielskim
2. podsumowaniem (streszczeniem) rozprawy w języku angielskim (łącznie 17 stron tekstu)
    - zawierającym obszerne i usystematyzowane preliminaria wyjaśniające wszystkie pojęcia i oznaczenia potrzebne do zrozumienia rozprawy,
    - szczegółowo i wyczerpująco opisującym najważniejsze wyniki poszczególnych artykułów,

3. listą pozostałych artykułów autora rozprawy (dwie prace współautorskie) wraz z krótkim ich omówieniem.

Tematem przedstawionej rozprawy są dwa odrębne, chociaż powiązane, obszary zagadnień:

1. zrandomizowane wersje twierdzeń typu Szarkowskiego dla operatorów losowych oraz ich zastosowanie do inkluzji różniczkowych (prace [A] i [B]),

2. analiza pewnych algebraicznych własności znanych klas funkcji, mianowicie funcji ciągłych, funkcji Darboux, tzw. $\mathcal{S}$-funkcji, a mówiąc ściślej, opis (charakteryzacja) pierścienia Aumanna generowanego przez pojedynczą funkcję odpowiedniego typu (praca [C]).

Pierwszy kierunek badań stanowi interesujące rozwinięcie teorii typu Szarkowskiego dla uogólnionych operatorów losowych. Operatory losowe pojawiają się w naturalny sposób w zagadnieniach losowych inkluzji różniczkowych jako losowe operatory Poincaré przesunięcia wzdłuż trajektorii stowarzyszone z losowymi inkluzjami różniczkowymi. Zaproponowane przez autora rozprawy uogólnienia w stosunku do wcześniejszych definicji Jana Andresa obejmowały, między innymi, zastąpienie multifunkcji *mierzalnych* multifunkcjami *słabo mierzalnymi* w definicji *operatora losowego* oraz wprowadzenie *σ-ideałów* w definicji *orbity losowej* zamiast zwykłej relacji „prawie wszędzie" (co odpowiada ideałowi zbiorów miary zero). Pozwoliło to otrzymać istotnie nietrywialne generalizacje dotychczasowych twierdzeń typu Szarkowskiego dotyczące porządku występowania orbit losowych dla operatorów losowych. Co więcej, stworzyło także możliwość zastosowania nowo otrzymanych wyników do problematyki losowych inkluzji różniczkowych, w szczególności, do pokazania, że w zbiorze losowych okresowych rozwiązań subharmonicznych losowej inkluzji różniczkowej istnienie rozwiązania n-okresowego dla $n > 1$ implikuje istnienie rozwiązań k-okresowych dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$.

Z kolei drugi kierunek badań koncentruje na badaniu pewnego pierścienia funkcji rzeczywistych zwanego przez autora *pierścieniem Aumanna* lub $\mathcal{A}$-pierścieniem. Jest to rodzina funkcji rzeczywistych zawierająca funkcje stałe oraz zamknięta ze względu na sumę, iloczyn, maksimum, minimum oraz branie granic w zbieżności jednostajnej. Autor wprowadza pojęcie *$\mathcal{A}$-pierścienia generowanego przez rodzinę funkcji $\mathcal{R}$* za pomocą formuły

$$\mathcal{AR}(\mathcal{R}) = \bigcap \{Q \subset \mathbb{R}^X \mid \mathcal{R} \subset Q \text{ oraz } Q \text{ jest } \mathcal{A}\text{-pierścieniem}\},$$

gdzie $X = \mathbb{R}$ lub $X = \mathbb{I}$. Następnie autor podaje charakteryzacje pierścienia Aumanna generowanego przez różne rodziny jednoelementowe tzn. $\mathcal{R} = \{f\}$, gdzie f jest funkcją np. Darboux lub Darboux ograniczoną. Dodatkowo dostarcza przy różnych zestawach założeń opisów przekrojów pierścienia Aumanna z rodziną funkcji ciągłych. Pozwala to w szczególności udzielić odpowiedzi na jeden z problemów postawionych w artykule

Heleny Pawlak i Ryszarda J. Pawlaka, *First-return limiting notions and rings of Sharkovsky functions*, Real Anal. Exchange **34**(2) (2009), 549–563.

Przedstawioną rozprawę magistra Pawła Barbarskiego oceniam bardzo wysoko. Wszystkie z załączonych w zbiorze prac ([A,B,C]) zostały napisane jasno i przejrzyście, z wyraźnym uwypukleniem głównych pomysłów i idei. Praca [A] opiera się zasadniczo na metodach wypracowanych i używanych we wcześniejszym, przełomowym w rozpatrywanej tematyce, artykule Jana Andresa, *Randomization of Sharkovskii-type theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. **136**(4) (2008), 1385–1395. Należy wszak mocno podkreślić, że autor rozprawy rozwinął znacząco stosowany we wspomnianej pracy aparat pojęciowy i uzyskał w efekcie istotne wzmocnienie wcześniejszych wyników.

Jednak najciekawsze, w moim przekonaniu, rezultaty zawiera praca [B], co, jak pozwolę sobie zauważyć, potwierdza w tym wypadku również punktacja listy ministerialnej. Praca [B] nie tylko istotnie rozszerza i uzupełnia wcześniejsze wyniki obu autorów dotyczące zrandomizowanych wersji twierdzenia Szarkowskiego, ale także pokazuje faktyczną siłę i znaczenie tej teorii widoczną w jej zastosowaniach do mocno nietrywialnych zagadnień inkluzji różniczkowych. Warto może przypomnieć, że współautor artykułu [B] Jan Andres jest wraz z Lechem Górniewiczem autorem klasycznej już dziś monografii z analizy nieliniowej dotyczącej użycia metod odwzorowań wielowartościowych w inkluzjach różniczkowych zatytułowanej *Topological Fixed Point Principles for Boundary Value Problems* (Springer, 2003).

Natomiast artykuł [C], chociaż również częściowo powiązany z twierdzeniem Szarkowskiego, doskonale wpisuje się z kolei w tematykę od wielu dziesięcioleci z wielkim powodzeniem uprawianą na Uniwersytecie Gdańskim, a związaną z pewnymi aspektami teorii funkcji rzeczywistych. Artykuł ten wydaje się być swoim charakterem bliższy pozostałym pracom autora ([D,E]) niezamieszczonym w rozprawie, niż pracom [A] i [B], co oczywiście w żadnym stopniu nie umniejsza jego wartości, a wręcz przeciwnie pokazuje szerokie spektrum zainteresowań naukowych autora rozprawy obejmujące nie tylko topologiczną dynamikę kombinatoryczną, ale również teorię funkcji rzeczywistych.

W mojej opinii rozprawa doktorska magistra Pawła Barbarskiego wnosi istotny wkład do teorii dyskretnych układów dynamicznych i zdecydowanie spełnia wymogi merytoryczne i formalne obowiązującej ustawy o stopniach naukowych. Rozprawę oceniam jako wyróżniającą. Uważam, że pan Paweł Barbarski w pełni zasługuje na przyznanie mu stopnia naukowego doktora i w związku z tym wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Piotr Bartłomiejczyk

Piotr Bartłomiejczyk