dr hab. Witold Bednorz
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 26.03.2017

**Recenzja rozprawy doktorskiej**
**pod tytułem 'Estymacja na sferze' Pani Natalii Jarzębkowskiej**

1. **Wstęp**

   Rozprawa doktorska poświęcona jest estymacji funkcji gęstości rozkładu na sferze. Problemy tego typu są niezwykle istotne zważywszy na ich ogromny potencjał aplikacyjny. W przypadku omawianej rozprawy, chodzi o taką metodę, która byłaby w stanie zaadaptować się do odpowiedniej klasy gładkości funkcji gęstości. Metoda zaproponowana przez Autorkę jest dosyć naturalna i polega na znalezieniu odpowiedniego systemu jąder na sferze a następnie na zastosowaniu jądrowego estymatora gęstości. Autorka pracy skrupulatnie dowodzi tempa zbieżności zaproponowanego estymatora w zależności od klasy gładkości gęstości. Chciałem wyrazić pewne obawy co do stosowalności uzyskanych wyników z racji, że gdyby nawet wyobrazić sobie praktyczny problem, w którym dałoby się niezależnie losować z pewnego rozkładu na sferze, to trudno mi przyjąć, że dobrze znamy regularność tego rozkładu. Wchodząc zatem w pewną polemikę z opisywanymi badaniami, wydaje mi się, że równie ciekawa może być sama procedura losowania próbki z zadanej funkcji gęstości na sferze. W moim przekonaniu taka funkcja byłaby znana w mapach na rozmaitości i w związku z tym znana co do stałej normującej, co sugeruje estymację MCMC. Być może w ten sposób dałoby się praktycznie przetestować sugerowaną w pracy metodę estymacji gęstości. Tematyka poruszana w rozprawie jest zbieżna z częścią badań promotora pracy nad teorią przestrzeni Biesowa, a kilka istotnych faktów, użytych w rozprawie, pochodzi z niedawno opublikowanej przez zespół promotora pracy. Estymacja gęstości rozkładów w kontekście regularności estymowanego na sferze rozkładu cieszy się umiarkowanym zainteresowaniem matematycznego świata, niemniej kilka prac w tym lub podobnych kierunkach napisano.

2. **Rozprawa doktorska**

   Rozprawa podzielona jest na cztery rozdziały:

   (a) Pierwszy dotyczy przestrzeni Biesowa na sferze. Z punktu widzenia prowadzonych rozważań jest to kluczowy element, bo wzmiankowane przestrzenie Biesowa klasyfikują funkcje gęstości względem klasy ich regularności. Przy okazji tego rozdziału Autorka sformułowała ciekawy problem równoważności klasycznej przestrzeni Sobolewa definiowanej przez operator Laplace'a-Beltramiego oraz wersji odwołującej się do pochodnych kierunkowych. Rozdział kończy się, przypomnieniem warunków charakteryzujących przynależenie funkcji do konkretnej przestrzeni Biesowa, który to wynik pochodzi z pracy promotora .

(b) Rozdział drugi zaczyna się przypomnieniem nierówności Talagranda, która jest formą nierówności Bernstein'a dla procesów empirycznych. W przypadku rozważań na sferze, nierówność Talagranda potrzebuje odpowiedniej interpretacji, która sformułowana jest jest jako Twierdzenie 2.2.5. Wspomniane twierdzenie wymaga odpowiednich założeń co do systemu jąder, które są w dalszym ciągu rozprawy istotnym punktem odniesienia. Dowody prezentowane w tym rozdziale są dosyć proste i przewidywalne.

(c) Rozdział trzeci to zasadnicza część rozprawy. Zaczyna się od podania układu framkowego dla sfery, a kończy wypracowaniem odpowiedniego systemu jąder na sferze. Generalnie bardzo mi się podobała zaproponowana konstrukcja chociaż aby być jej pewnym, musiałem ją sobie skrupulatnie przeliczyć we własnym zakresie. Dalej Autorka przechodzi do sprawdzenia warunków, które system jąder musi spełniać. Tu miałem jedyną wątpliwość, w sprawi której musiałem się skonsultować z Autorką pracy, dotyczącą jednego z warunków wymaganych od układu operatorów. Jak zrozumiałem z nadesłanych wyjaśnień, fragment ten jest jasny dla specjalistów z teorii falek. Po sprawdzeniu warunków, które w istocie spełnia wzmiankowana rodzina jąder Autorka pracy przechodzi do głównego twierdzenia w rozprawie, czyli Twierdzenia 3.2.2. Postuluje on tempo zbieżności jądrowego estymatora gęstości w zależności od klasy regularności estymowanej funkcji. Dowód jest żmudny i wymagał od Autorki sporo własnej pracy aby go zrealizować i spisać w przystępnej formie.

(d) W ostatnim czwartym rozdziale Autorka przedstawia zalety prezentowanego podejścia oraz podaje kilka ciekawych problemów badawczych.

3. **Lista uwag** Podaje listę uwag i błędów, które znalazłem w trakcie lektury.

   (a) Z mojej perspektywy, trochę brakuje jakiegoś wstępu falkowego, z którego dałoby się potem w miarę gładko przepchnąć takie uwagi, jak ta między (3.8), a (3.9) o skończoności $\mathcal{D}(x, y)$.

   (b) strona 32 linia -4 zdanie kończy się dosyć niezręcznie

   (c) strona 33 linia -8 brakuje $d$ w indeksie



W K

(d) strona 33 linia -5 każdy zamiast kążdy

(e) strona 40 linia 9 (3.19) zamiast (3.2)

(f) strona 40 linia 10 odpowiednie wyrażenie zamiast $\mathbf{E}\|f_n(j^*) - f\|_2^2$

(g) strona 41 linia 5 bez kwadratu na końcu

4. **Podsumowanie** Rozprawa dotyczy dosyć technicznego problemu, ale nie należy jej odmawiać pewnego uroku. Rozumiem, że w tle znajdują się trudne problemy teorii przestrzeni Biesowa, natomiast jeśli chodzi o warstwę aplikacyjną, to widzę pewien kłopot z losowaniem z zadanych gęstości testowych, bądź też z zagadnieniami praktycznymi w których łatwo da się zdeterminować stopień regularności estymowanej gęstości. Niemniej cała teoria przestrzeni Biesowa dotyczy trochę czego innego - esencją jest tu badanie wpływu stopnia regularności zadanej funkcji na odpowiednie jej własności. Konkretnie w przypadku opisywanej rozprawy, wpływu stopnia gładkości estymowanej funkcji na tempo zbieżności estymatora jądrowego. Muszę napisać, że trochę zabrakło mi dyskusji granicznych przypadków uzyskanych wyników oraz ich optymalności. Z drugiej strony należy przyznać, że omawiana rozprawa, stanowi przykład uczciwej matematyki, co należy docenić.

5. **Konkluzja** W moim głębokim przekonaniu rozprawa doktorska Pani Natalii Jarzębkowskiej zasługuje na ocenę dobrą. Jest świadectwem rzetelnej pracy Autorki, z drugiej strony pozostawia pewien niedosyt. Nadto z pełnym przekonaniem stwierdzam, że rozprawa doktorska 'Estymacja na sferze' spełnia kryteria ustawowe i zwyczajowe uzyskania stopnia doktora w dziedzinie matematyki. Wnoszę do Rady Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego o jej dopuszczenie do publicznej obrony.

Witold Bednorz