UAM

Uniwersytet im A.Mickiewicza w Poznaniu

Wydział Matematyki i Informatyki
Umultowska 87,
61-614 Poznań

Prof.dr hab Leszek Skrzypczak
tel.: +48-61-829-54-73
fax: +48-61-829-53-15
e-mail: lskrzyp@amu.edu.pl

Poznań 06.12.2016

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Natalii Jarzębkowskiej
Estymacja na sferze

Praca doktorska mgr Natalii Jarzębkowskiej dotyczy estymacji adaptacyjnej funkcji gęstości niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Funkcja gęstości jest określona na d wymiarowej sferze, a przy estymacji wykorzystuje się kratę falkową ("wavelet frame"). Adaptacyjność estymatora oznacza, że nie wymaga on apriorycznego ustalania parametrów i przystosowuje się regularności funkcji. Nieco ściślej mówiąc, zachowanie estymatora $\tilde{f}_n$ ma charakter adaptacyjny jeśli dla pewnej klasy $\mathcal{F}$ funkcji gęstości o gładkości s istnieje stała $C = C(n, s, d) > 0$, taka że

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} E\|\tilde{f}_n - f\| \leqslant C(n, s, d).$$

Kratą w przestrzeni Hilberta L_2 nazywamy taki układ funkcji ψ_j, dla którego istnieją stałe $C, c > 0$, takie że

$$c\|f\|_2^2 \leqslant \sum_{j\in J} | < f, \psi_j > | \leqslant C\|f\|_2^2$$

dla dowolnej funkcji $f \in L_2$. Krata jest kratą Parsevala jeśli $c = C = 1$.

Dysertacja jest w dużej mierze oparta na pracy Marcina Bownika i Karola Dziedziula "Smooth Ortogonal projections on the sphere"(pozycja [3] w spisie literatury), w której skonstruowano kratę Parsevala na $\mathbb{S}^d$ za pomocą falek Daubechies. Tę kratę wykorzystano w rozprawie do zdefiniowania estymatorów gęstości na sferze. Wcześniejsze oszacowania estymatorów tego typu opierały się na wykorzystaniu innych krat falkowych tzw. ńeedles frames"por. Baldi, Kerkyachan, Marinucci, Picard [1], Kueh [19].

Rozprawa składa się zasadniczo z trzech rozdziałów. Pierwszy poświęcony jest przestrzenią funkcyjnym na sferze d-wymiarowej. Drugi nierówności koncentracyjnej Talagranda na sferze. Trzeci konstrukcji estymatora funkcji gęstości na sferze. Celem dysertacji jest udowodnienie Twierdzenie 3.2.2 w którym pokazano, że skonstruowany estymator jest adaptacyjny jeśli funkcja gęstości jest elementem przestrzeni Biesowa $B^s_{2,\infty}(\mathbb{S}^d)$. Dysertacja zawiera również dwa dodatkowe rozdziały. Wprowadzenie w którym omówiono motywację i zawartość pracy oraz Rozdział 4 Podsumowanie.

Rozdział pierwszy dotyczy przestrzeni Sobolewa i Biesowa na d-wymiarowej sferze. Rozdział ten nie zawiera oryginalnych wyników mgr Jarzębkowskiej . Autorka opiera się tutaj na Książce F. Dain, Y . Xu "Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls"([11]) i arktykule P. Lizorkina i H.Rustanowa ([22]). Podana jest definicja i podstawowe własności harmonik sferycznych w tym ich związek z operatorem Beltramiego-Laplace'a na sferze. Korzystając, z tego że harmoniki sferyczne są funkcjami własnymi tego operatora wprowadza się potęgi ułamkowe minus Laplacianu $(-\Delta_0)^r$. Następnie podaje się dwie definicje przestrzeni Sobolewa. Przestrzeń W_p^r, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$, definiuje się poprzez potęgi $(-\Delta_0)^{r/2}$. Natomiast przestrzeń $\mathcal{W}_p^r$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$, lub poprzez iteracje pewnych operatory różniczkowe pierwszego rzędu na sferze tzw. pochodnych kątowych. Obydwie definicje pokrywają się w przypadku hilbertowskim i ten przypadek jest wykorzystany do estymacji funkcji gęstości. Dalej, za wspomnianą wyżej książką, wprowadza się dwa moduły gładkości, przy czym tylko jeden z nich jest wykorzystany do definicji przestrzeni Biesowa $B_{p,q}^s$, $s > 0$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, ten który związany jest z K-funkcjonałem dla przestrzeni Sobolewa W_p^r. Podaje się równoważne charakteryzacje przestrzeni Biesowa pochodzące z pracy Lizorkina i Rustanowa. Jak wspomniałem dalsza część dysertacji w znacznej mierze opiera się na artykule M.Bownika i K.Dziedziula, w którym wykorzystano inną definicję przestrzeni Sobolewa poprzez zasadę lokalizacji korzystającą z faktu, że każdą zwartą rozmaitość możemy pokryć skończoną ilością map. Mgr Jarzębkowska nie wyjaśnia w jaki sposób zostały zdefiniowane przestrzenie funkcyjne w tej pracy, czyni jedynie uwagę, że ta definicja jest równoważna definicji przestrzeni W_p^r powołując się na wyniki H.Triebla ([28]). Należy zaznaczyć, że harmoniki sferyczne nie odgrywają w dalszej części rozprawy ważnej roli. Uważam, że dysertacja powinna zawierać dokładniejsze porównanie przestrzeni użytych w pracy [3] z tymi które wprowadza autorka. Odwołanie się do książki H.Triebla jest formalnie poprawnym choć się najprostszym rozwiązaniem. Wyniki Triebela dotyczą rozmaitości nie zwartych o ograniczonej geometrii, a tego powodu musi on używać języka geometrii różniczkowej. Dla rozmaitości zwartych takie podejście nie jest konieczne, ze względu na istnienei kończonego układu map pokrywających rozmaitość. Można to było omówić np. duchu rozdziałów 1.5 i 1.6 książki M.Taylora "Pseudo-differential operators" z 1981 roku .

Rozdział 2 poświęcony jest nierówności Talagranda w wersji Bousqueta. Uzyskane przez mgr Jarzębkowską wyniki są wnioskami z nierówności Talagranda dla niezależnych zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ o wspólnym rozkładzie f na sferze $\mathbb{S}^d$ i jąder K_j zadających estymator gęstości f wzorem

$$f_n(j)(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K_j(x, X_i) .$$

Jądra K_j są funkcja mierzalnymi względem σ-algebry produktowej na $\mathcal{L}(\mathbb{S}^d) \times \mathcal{L}(\mathbb{S}^d)$ spełniającymi trzy dodatkowe warunki (por. strony 19 i 20). Autorka sprawdza najpierw, ze przy powyższych założeniach jądra te spełniają założenia potrzebne do zachodzenia nierówności Talagranda. Stosowna wersja tej nierówności dla estymatorów zdefiniowanych przez te jądra jest treścią Wniosku 2.2.4. Korzystając z nierówności Talagranda i własności jąder pokazuje się w końcu że

$$P\left\{ \|f_n(j) - Ef_n(j)\|_2 \geqslant \frac{2^{jd}}{\sqrt{n}} M \sqrt{\max 1, \|f\|_\infty} \right\} \leqslant 2e^{-2^{jd}} ,$$

jeśli $\frac{2^{jd}}{n} < C_E$ dla pewnego $C_E > 0$. M jest stałą, która zależy również od C_E.

Wymieniona właśnie nierówność jest tezą Twierdzenie 2.2.5. W dowodzie tego twierdzenia napisano "z Lematu 2.2.2 wiemy również, że $\exists C_E > 0 \quad \frac{2^{jd}}{n} < C_E$". Lemat 2.2.2 nie zawiera jednak żadnego oszacowania dla $\frac{2^{jd}}{n}$. Co więcej takie oszacowanie nie może zachodzić skoro nierówność (2.10) z tego lematu zachodzi dla wszystkich $j \geqslant j_0$. Zatem nierówność $\frac{2^{jd}}{n} < C_E$ oznacza, że teza Twierdzeniu 2.2.5 zachodzi dla j rzędu $\log_2 n$, co zostało w tym twierdzeniu założone, choć sformułowane jest to może niezbyt zręcznie. Jaśniej takie założenie pojawia się w Twierdzeniu 3.2.2. - formuła (3.11).

Rozdział 3 rozpoczyna się od konstrukcji krat falkowych na sferze $\mathbb{S}^d$. Autorka konsekwentnie używa neologizmu i pisze "framka", "układy framkowe". Nie widzę potrzeby sprowadzania tutaj neologizmu, skoro w literaturze polskiej, choć nie licznej, funkcjonuje termin "krata", czy też "rama". Słowo "krata" został użyty przez P.Wojtaszczyka w jego książce dotyczącej teorii falek i tego terminu będę tu używał. W podrozdziale 3.1 przedstawiono konstrukcję Bownika i Dziedziula kraty na sferze $\mathbb{S}^d$ w sytuacji gdy sfera pokryta jest dziedzinami dwóch układów współrzędnych. Konstrukcja ta wychodzi od falek Daubechies, które przenosi się na sferę a następnie dzięki odpowiednim rzutowaniom uzyskuje się kratę falkową. Niedosyt budzą mało rozbudowane dowody fragmentów dotyczących przestrzeni Biesowa, skoro mgr Jarzębkowska zdaje sobie sprawę że w pracy [3] "w ogóle nie podejmuje się charakteryzacji przestrzeni Biesowa ...za pomocą współczynników framkowych." Uważam, że rozprawa doktorska mogła by zawierać więcej szczegółów nawet gdy dowody nie wymagają nowych pomysłów, tym bardziej, że sama dysertacja nie jest obszerna.

Podrozdział 3.2.2 zawiera sformułowanie i dowód najważniejszego twierdzenia całej rozprawy. Korzystając z wspomnianej kraty falkowej na $\mathbb{S}^d$, definiuje się jądra K_j za pomocą funkcji, które są zeskalowanymi odpowiednikami funkcji skalującej, por. (3.5). Te jądra definiują estymatory rozkładu gęstości f na sferze w sposób określony powyżej. O gęstości zakłada się, że jest elementem przestrzeni Biesowa $B^s_{2,\infty}(\mathbb{S}^d)$. Taki wybór przestrzeni opisujący regularność funkcji gęstości jest naturalny jeśli estymator definiuje się za pomocą układu falkowego. Normę funkcji w przestrzeni Biesowa można scharakteryzować korzystając jedynie ze współczynników jej rozwinięcia falkowego, co znakomicie ułatwia rachunki. Ponadto przestrzeń $B^s_{2,\infty}(\mathbb{S}^d)$ jest największą z przestrzeni Biesowa $B^s_{2,q}(\mathbb{S}^d)$ o tej samym parametrze gładkości s. Zawiera ona również przestrzenie Sobolewa $W^s_2(\mathbb{S}^d)$.

W założeniach twierdzenia przyjmuje się, że spełnione są następujące nierówności wiążące gładkość s gęstości f z wymiarem sfery, gładkością r_N elementów kraty oraz stałymi r, R związanymi z wyznaczeniem parametru $j_n \in \mathbb{N}$ który wskazuje estymator:

$$\frac{d}{2} < r \leqslant s \leqslant R \leqslant r_N.$$

Przy tych założeniach istnieje stała $c = c(r, R, U) > 0$ zależna of r, R i U ale nie zależąca od $B > 1$ taka, że dla każdego f, $\|f\|_\infty \leqslant U$ i $\|f\|_{s,2} \leqslant B$ (norma w przestrzeni Biesowa)

$$E\|f_n(j_n) - f\|_2^2 \leqslant cB^{2d/(2s+d)} n^{-2s/(2s+d)}.$$

Rozprawa doktorska mgr Natalii Jarzębkowskiej nie jest obszerna. Jej celem jest udowodnienie dwóch twierdzeń. Pierwsze jest wersją nierówności Talagranda dla niezależnych zmiennych losowych o gęstości na sferze jednostkowej $\mathbb{S}^d$. Drugie twierdzenie dotyczy estymacji adaptacyjnej takich funkcji gęstości o gładkości opisanej w terminach przestrzeni Biesowa. Estymator konstruuje się za pomocą kraty Parsevala na sferze opisanej przez M. Bownika i K. Dziedziula. Uważam, ze dysertacja zyskała by na przejrzystości, gdyby autorka dokładniej wyjaśniła związki swojej pracy z artykułem [3]. Harmoniki sferyczne omówione dosyć dokładnie w pierwszym rozdziale nie odgrywają w dalszej części żadnego znaczenia, skoro można było określić przestrzenie funkcyjne inaczej. Uzyskane wyniki są jednak nowe i oryginalne. Ich prezentacja poza usterkami o których już wspominałem jest przejrzysta, a dołączone rysunki pozwalają łatwiej zrozumieć konstrukcję kraty Parsevala na sferze.

Poniżej wymieniam jeszcze kilka zauważonych usterek:

1. Uwaga 1.4.3. jest dla mnie niezrozumiała. O jaki mnożnik, gdzie działający, tu chodzi? Jakie to ma znaczenie dla dalszej części rozprawy?
2. Po detalicznym wyjaśnieniu jak definiujemy na sferze miarę i operator Laplace'a oczekiwałbym wyjaśnienia co to są dystrybucje na sferze skoro w Definicji 1.5.4 używa się "pochodnych dystrybucyjnych."
3. Skoro Rozdział 2 poświęcony jest nierówności Talagranda w wersji Bousqueta, warto by umieścić w bibliografii jego pracę a nie tylko pracę [17], z której cytuje się jego wynik. W pierwszej pozycja w spisie literatury nie wymieniono natomiast wszystkich autorów.
4. W rachunkach na stronie 21, korzysta się nie tylko z niezależności zmiennych Y_i ale również z tego, że $EY_i = 0$.
5. Na stronie 36 przy definicji $\tilde{E}_I^-$ w indeksach górnych powinny być minusy.
6. Zbiór $\Sigma(s, B)$ nie jest kulą w przestrzeni Biesowa co stwierdza jedno z końcowych zdań na stronie 37.

Kilka drobniejszych usterek pomijam.

Z danych zawartych w Mathenmatical Review wynika, że mgr Natalia Jarzębkowska jest współautorką jednej publikacji Applicationes Mathematicae

Reasumując uważam, że pomimo wspomnianych usterek rozprawa doktorska mgr Natalii Jarzębkowskiej spełnia wymogi Ustawy o tytule i stopniach naukowych. Wnioskuję o dopuszczenie mgr Natalii Jarzębkowskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.