Łódź, dn. 15 marca 2016 r.

dr hab. Szymon Głąb
Instytut Matematyki
Politechnika Łódzka

Recenzja pracy doktorskiej Pana mgra Pawła Klingi pt. „Permutacje i odwzorowania o nośnikach ideałowych oraz ich zastosowanie w szeregach i odwzorowaniach osiowych"

Klasyczne twierdzenie Riemanna mówi, że elementy szeregu warunkowo zbieżnego można przepermutować tak, by był on zbieżny do z góry danej liczby. Filipów i Szuca badali problem czy teza twierdzenia Riemanna zachodzi, jeśli o pemutacji założyć, że jej nośnik należy do pewnego ideału. Okazuje się, że dla jednych ideałów tak jest w istocie (np. dla ideału gęstości zero), podczas gdy dla innych nie (np. dla ideału zbiorów skończonych). Własność tę nazwali (R). Autorzy wykazali, że własność (R) przysługuje ideałom, których nie da się rozszerzyć do ideałów sumowalnych. Jako, że istnieje wielowymiarowa wersja twierdzenia Riemanna (udowodniona przez Levy'ego i Steinitza), naturalnym pytaniem jest, czy wielowymiarowy odpowiednik własności (R) dla ideałów jest równoważny własności (R). Ciekawe jest także, które znane ideały mają własność (R), lub równoważnie, nie rozszerzają się do ideałów sumowalnych. Znaczną część rozprawy Autor poświęca tym pytaniom.

W roku 1935 Stefan Banach postawił w słynnej Księdze Szkockiej pytanie, czy każda permutacja ω^2 jest złożeniem skończenie wielu permutacji osiowych. Problem ten został pozytywnie rozwiązany przez Ehrenfeuchta i Grzegorka, którzy wykazali, że wystarczą 4 permutacje osiowe i że nie da się tego wyniku poprawić. Autor analizuje następujące pytanie – czy wyniki Ehrenfeuchta i Grzegorka da się wzmocnić zastępując permutacje osiowe, permutacjami osiowymi, które na każdej osi mają nośnik skończony lub należący do ustalonego ideału?

Praca zawiera Wstęp, w którym znajduje się wprowadznie do tematyki oraz krótkie streszczenie uzyskanych w rozprawie wyników. W pierwszym rozdziale zatytułowanym „Podstawowe pojęcia" umieszczone są definicje używanych w pracy pojęć oraz główne fakty, które zostaną wykorzystane w dalszych częściach pracy. Wyniki autora są zamieszczone w kolejnych czterech rozdziałach, które składają się na dwie tematyczne części. Część pierwsza – rozdziały drugi i trzeci – to nawiązanie do wyników uzyskanych przez Filipowa i Szucę. Część druga – rozdziały czwarty i piąty – to nawiązanie do wyników Ehrenfeuchta i Grzegorka.

Rozdział 2 rozpoczyna się od Twierdzenia 2.1.1. mówiącego, że jeśli ideał $\mathcal{I}$ ma własność (R), a zbiór $S(\sum_{n\in\omega} v_n)$ osiągalnych sum dla szeregu $\sum_{n\in\omega} v_n$ elementów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ jest prostą l, to zbiór $S(\sum_{n\in\omega} v_n)$ osiągalnych sum dla permutacji o nośnikach w $\mathcal{I}$ też jest prostą

l. W dalszej części rozdziału Autor zmierza do udowodnienia tego wyniku w przypadku, gdy $S(\sum_{n\in\omega} v_n)$ jest całą płaszczyzną. Zamiar ten w znacznej mierze, choć nie do końca, udaje się osiągnąć. W przypadku, gdy $\mathcal{I}$ jest maksymalny, udaje się to pokazać – Twierdzenie 2.2.4 i Wniosek 2.2.5. Główny wynik rozdziału, czyli Twierdzenie 2.2.16 mówi o tym, że własność (R) dla ideału $\mathcal{I}$ jest równoważna temu, że $S(\sum_{n\in\omega} v_n) = \mathbb{R}^2$ implikuje istnienie zbioru indeksów $W \in \mathcal{I}$ takiego, że $S(\sum_{n\in W} v_n) = \mathbb{R}^2$. Jest to słabsza własność od oczekiwanej, gdyż nie wiadomo czy szereg $\sum_{n\in W} v_n$ jest zbieżny. Gdyby tak było, to mielibyśmy $S_{\mathcal{I}}(\sum_{n\in\omega} v_n) = S(\sum_{n\in W} v_n) = \mathbb{R}^2$, co dawało by analogon Twierdzenia 2.1.1.

W dowodzie Twierdzenia 2.2.16. Autor rozważa dwa przypadki:

1) Dla każdego v z okręgu jednostkowego istnieje wektor Levy'ego u szeregu $\sum_{n\in\omega} v_n$ taki, że kąt pomiędzy v i u jest mniejszy niż $\pi/2$.

2) Istnieją tylko dwa, równoległe i przeciwnie skierowane, wektory Levy'ego.

Jeśli zachodzi przypadek 1), to Autor potrafi uzyskać odpowiednie wzmocnienie – Twierdzenie 2.2.17. W przypadku 2) nie ma takiego wzmocnienia. Praca zawiera je jedynie w szczególnym przypadku, gdy $\sum_{n\in\omega} v_n = \sum_{n\in\omega}(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}, \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}})$. Autor wprowadza pojęcie superwektora Levy'ego i dowodzi, że przypadek 2) implikuje istnienie dwóch superwektorów Levy'ego (Twierdzenie 2.2.10). Niestety ta część drugiego rozdziału, choć obiecująca, nie prowadzi do rozstrzygnięcia przypadku 2). Przez to rozważania o superwektorach Levy'ego pozostają w pewnym zawieszeniu, bez widocznego powiązania z tymi głównymi.

W dowodzie Twierdzenia 2.2.16 nie wszystkie przypadki zostały uwzględnione. Rozważmy następujący szereg. Niech $N_0 = 0$, $N_k = 3\cdot 4^k + N_{k-1}$. Dla $n \in (N_{k-1}, N_k]$ zdefiniujmy elementy (x_n, y_n) następująco:

$$\underbrace{(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{4^k}), (0, -\frac{1}{4^k}), (-\frac{1}{2^k}, 0), \dots, (\frac{1}{2^k}, \frac{1}{4^k}), (0, -\frac{1}{4^k}), (-\frac{1}{2^k}, 0)}_{4^k \text{ razy}}.$$

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ będą takie, że $a^2 + b^2 > 0$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ax_n + by_n)^+ = \sum_{k=1}^{\infty} 4^k(a\frac{1}{2^k} + b\frac{1}{4^k}) = \infty, \text{ gdy } a, b \geq 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ax_n + by_n)^+ = \sum_{k=1}^{\infty} 4^k(a\frac{1}{2^k} + (a-b)\frac{1}{4^k}) = \infty, \text{ gdy } a \geq 0, b < 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ax_n + by_n)^+ = \sum_{k=1}^{\infty} 4^k((-a+b)\frac{1}{2^k} + b\frac{1}{4^k}) = \infty, \text{ gdy } a < 0, b \geq 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ax_n + by_n)^+ = \sum_{k=1}^{\infty} 4^k(-a\frac{1}{2^k} - b\frac{1}{4^k}) = \infty, \text{ gdy } a, b < 0.$$

Zatem $S(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)) = \mathbb{R}^2$. Szereg ten zawiera dokładnie 3 wektory Levy'ego: (1,0), (0,-1) oraz (-1,0). Jednak kąt pomiędzy żadnym z nich i wektorem (0,1) nie jest mniejszy niż $\pi/2$.

Ten przypadek można podciągnąć pod przypadek 2) w dowodzie Twierdzenia 2.2.16. Wynika to z tego, że Autor nigdzie w dowodzie nie skorzystał z faktu, że istnieją **tylko** dwa wektory Levy'ego, a jedynie z tego, że istnieją dwa równoległe i przeciwnie skierowane wektory Levy'ego. Jednak przy takim sformułowaniu przypadku 2) nie implikuje on już założeń Twierdzenia 2.2.10 i rozważania o superwektorach czyni jeszcze odleglejszymi od tematyki drugiego rozdziału.

W dowodzie Twierdzenia 2.2.16. Autor pisze, że bez zmniejszenia ogólności można wymagać by ciąg $\alpha_i u_1 + w_i$ był postaci $\alpha_i u_1$, czyli można zaniedbać zaburzenie o szereg zbieżny bezwzględnie. Uważam, że to powinno być dokładniej uzasadnione. W dowodzie Wniosku 2.2.18. własność (W) jest zastosowana do szeregu o wyrazach dodatnich, podczas gdy formalnie stosuje się ją tylko do szeregów warunkowo zbieżnych. Potrzeba, by w tym miejscu przejść przez jakiś pomocniczy szereg warunkowo zbieżny.

Rozdział 3 zawiera odpowiedź na pytanie czy ideały ven der Waerdena $\mathcal{W}$ i Hindmana $\mathcal{H}$ mają własność (R), lub równoważnie czy nie są zawarte w ideałach sumowalnych. Okazuje się, że $\mathcal{W}$ da się rozszerzyć do ideału sumowalnego (Twierdzenie 3.1.1.), podczas gdy $\mathcal{H}$ ma własność (R) (Twierdzenie 3.2.1.). Następnie Autor wprowadza nowy współczynnik kardynalny $\kappa_M(\mathcal{I})$ związany z ideałem $\mathcal{I}$. Definiuje go jako minimalną moc rodziny ideałów sumowalnych, których suma mnogościowa zawiera $\mathcal{I}$. Jeśli ideał $\mathcal{I}$ nie ma własności (R), to $\kappa_M(\mathcal{I}) = 1$, w przeciwnym razie $\kappa_M(\mathcal{I}) \geq \aleph_0$ (Twierdzenie 3.3.1.). Dla P-ideałów o własności (R) udowodnione jest oszacowanie $\kappa_M(\mathcal{I}) \geq \aleph_1$ (Twierdzenie 3.3.2). W końcu, w Twierdzeniu 3.3.3. otrzymujemy oszacowanie $\kappa_M(\mathcal{I}) \geq add^*(\mathcal{I})$. Należy zauważyć, że dla dowolnego ideału mamy $add^*(\mathcal{I}) \geq \aleph_0$, a dla P-ideału $add^*(\mathcal{I}) \geq \aleph_1$. Zatem Twierdzenia 3.3.1. i 3.3.2. wynikają z Twierdzenia 3.3.3., które, z kolei, jest stosunkowo prostą obserwacją.

W rozdziale 4 przedstawione są rozważania nad możliwością przedstawienia permutacji ω^2 jako złożenia skończenie wielu permutacji osiowych o skończonych nośnikach na każdej osi.

Moje wątpliwości budzi dowód Lematu 4.1.1. Rozważmy następujący przykład. Niech $n = 2$, $m = 6$, $L = [0,6]^2 \setminus [0,2)^2$. Rozważmy następującą permutację $\sigma : L \to L$ zdefiniowaną wzorem $\sigma(3,4) = (4,1)$, $\sigma(4,1) = (3,4)$ oraz $\sigma(x,y) = (x,y)$ w pozostałych przypadkach. Wówczas $L_2 = [2,6]^2$, $L_1 = [2,6] \times [0,2)$ oraz $A(1,2) = \{(x,y) \in L_2 : \sigma(x,y) \in L_1\} = \{(3,4)\}$. Zauważmy dalej, że $f_1(3,4) = (4,1) \oplus (0,2) = (4,3)$ oraz $f_1(4,3) = (4,3)$. Zatem f_1 nie jest różnowartościowa, a w konsekwencji nie jest permutacją obszaru L. Aby f_1 była różnowartościowa, trzeba by ją inaczej zdefiniować w punkcie $(4,3)$.

Trudny do zrozumienia jest krok trzeci w konstrukcji. Zdanie „Ponieważ L_2 zawiera teraz elementy, które początkowo należały do L_1..." sugeruje, że zbiory L_j zmieniają się z każdym krokiem konstrukcji. Należałoby zmieniać nazwę zbioru po każdej zmianie (np. L_j^k to zbiór L_j

w k-tym kroku) i precyzyjnie, przy użyciu formuły, go opisać. Zmianie ulega też zbiór $A(1,2)$ i nie jest dla mnie jasne jak wygląda on w trzecim i kolejnych krokach.

Dla lepszego zrozumienia należałoby napisać, co się wydarzyło po 4, 8 i ostatnim 12 kroku konstrukcji. W obecnej formie dowód Lematu 4.1.1. nie tylko zawiera błędy, ale nie jest napisany w sposób przyjazny dla czytelnika. Nie udało mi się zrekonstruować dowodu tego lematu. Mimo to jestem przekonany, że Lemat 4.1.1. jest nie tylko prawdziwy, lecz także ciekawe geometryczne idee zawarte w jego dowodzie da się dopracować.

Dowód Wniosku 4.1.2. jest w moim odczuciu zbyt skrótowy. W tym miejscu okazuje się w jaki sposób L-permutacje są istotne dla całego rozumowania. Oceniam to jako kluczowy pomysł prowadzący do rozwiązania problemu i dlatego uważam, że Autor powinien to dobrze opisać, a nie pozostawiać czytelnikowi uzupełnianie szczegółów.

Kolejna uwaga jest raczej psychologiczna. Autor definiuje odwzorowania pionowe jako te, które zachowują osie poziome, a odwzorowania poziome jako te, które zachowują osie pionowe. W Przykładzie 4.1.7. i dalej pionowe osie nazywa wierszami, a poziome kolumnami. Takie odwrócenie typowych pojęć było dla mnie męczące i znacznie utrudniało analizę tego przykładu. Podobną uwagę mam do Lematu 5.1.1., gdzie funkcja jest oznaczona przez literę m podczas, gdy linijkę wcześniej m oznacza liczbę naturalną.

Rozdział 5 zawiera kontynuację rozważań z poprzedniego rodziału. Autor bada, kiedy można funkcję $f : \omega^2 \to \omega^2$ przedstawić jako złożenie skończenie wielu odwzorowań osiowych o nośnikach skończonych na każdej osi. Okazuje się, że jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy f daje się przedstawić jako złożenie skończenie wielu odwzorowań mających skończone orbity (Twierdzenie 5.1.6). Nie każda funkcja $f : \omega^2 \to \omega^2$ ma tę własność, co ilustruje Przykład 5.1.2 oraz Fakt 5.1.3.

W dowodzie Lematu 5.1.5 niezrozumiały jest dla mnie napis

$$(a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q) \xrightarrow{p} (a_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_2, \ldots, a_p, \ldots, a_p).$$

Po pierwsze mamy tutaj kolizję oznaczeń – p oznacza jednocześnie odwzorowanie i liczbę naturalną. Po drugie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q)$ i $(a_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_2, \ldots, a_p, \ldots, a_p)$ to numeracja odpowiednio dziedziny i przeciwdziedziny p. Powyższy napis sugeruje, że k-ty element pierwszego ciągu przechodzi na k-ty element drugiego podczas, gdy ma to miejsce z dokładnością do pewnej permutacji zbioru L.

Z obowiązku recenzenta wspomnę o kilku błędach literowych:
str. 11 – zamiast $a^- = \min\{a, 0\}$ powinno być $a^- = \max\{-a, 0\}$.
str. 21 – W Twierdzeniu 2.2.7. po „Istnieją ciągi liczb rzeczywistych $(x'_n)_{n\in\omega}$, $(y'_n)_{n\in\omega}$" należy dopisać „zbieżne do zera".
str. 12 – W Twierdzeniu 1.2.10. zamiast R^m powinno być $\mathbb{R}^m$.

Dotychczas skupiłem się na krytycznej analizie zawartości rozprawy doktorskiej Pana mgra Pawła Klingi. Teraz czas na podkreślenie mocnych stron tego doktoratu. Najobszerniejszy i najbogatszy w wyniki jest rozdział 2, i on najbardziej mi się podobał. Do najciekawszych rezultatów zaliczam:

– Twierdzenie 2.2.7 mówiące, że w $\mathbb{R}^2$ nie z każdego szeregu potencjalnie warunkowo zbieżnego da się wybrać podszereg warunkowo zbieżny o tym samym zbiorze osiągalnych sum.

– Rozważania o superwektorach Levy'ego zawarte w Twierdzeniu 2.2.10, które moim zdaniem będą miały ciekawe aplikacje.

– Główny wynik tego rozdziału, czyli Twierdzenie 2.2.16 oraz płynące z niego wnioski.

W tym rozdziale Autor używa aparatu matematycznego z mało znanej pracy Halperina *Sums of series, permitting rearrangements*, który dalej z powodzeniem rozwija. Zawartość rozdziału odzwierciedla dogłębną analizę zachowania szeregów warunkowo zbieżnych na płaszczyźnie przeprowadzoną przez Pana Pawła Klingę. Dowody wymagały pomysłowości i pokonania licznych problemów technicznych.

Rozdział 3 zawiera dwa interesujące wyniki – Twierdzenia 3.1.1 i 3.2.1. Dowody tych faktów są napisane w taki sposób, że łatwo przez nie przebrnąć, ale jednocześnie są bardzo pomysłowe, wręcz trikowe. Po przeczytaniu tych dowodów miałem wrażenie, które nie opuszcza mnie do teraz, że sam bym tego nie wymyślił.

Ostatnie dwa rozdziały podobały mi się najmniej, głównie z powodu usterek w dowodzie Lematu 4.1.1, na którym opiera się główny wynik rozdziału 4, na którym, z kolei, opiera się główny wynik rozdziału 5. Po pominięciu tych niedociągnięć, należy docenić idee stojące za dowodami, które mają swój urok.

Wyniki i techniki dowodowe zawarte w rozprawie doktorskiej są różnorodne, pomysłowe i niekiedy trikowe. Znaczna część wyników ujęta jest w samodzielnych pracach mgra Pawła Klingi, co świadczy o jego naukowej samodzielności. Uważam, że Autor ma znaczne szanse na dalszą owocną karierę naukową i uzyskanie w przyszłości stopnia doktora habilitowanego. Uwagi krytyczne zawarte w tej recenzji nie mają wpływu na moją pozytywną ocenę omawianej pracy. Uważam że spełnia ona kryteria stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej Autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Szymon Głąb

15.03.2016