dr hab. inż. Roman Wituła
Politechnika Śląska w Gliwicach
Wydział Matematyki Stosowanej
Instytut Matematyki
ul. Kaszubska 23
44-100 Gliwice

Gliwice, 25.03.2016

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

mgr. Pawła Klingi *Permutacje i odwzorowania o nośnikach ideałowych oraz ich zastosowania w szeregach i odwzorowaniach osiowych*

Praca doktorska pana magistra Pawła Klingi zatytułowana: „Permutacje i odwzorowania o nośnikach ideałowych oraz ich zastosowania w szeregach i odwzorowaniach osiowych" powstała w Zakładzie Teorii Mnogości UG, pod kierunkiem dr. hab. prof. Uniwersytetu Gdańskiego Andrzeja Nowika. Praca ta obejmuje, przede wszystkim, wyniki własne autora, z których część jest już opublikowana, a część jest w trakcie recenzji. Mówimy tutaj o publikacjach w bardzo dobrych czasopismach: Journal of Math. Analysis and Applications, Colloquium Mathematicum, co w związku z prezentowaną recenzją warte jest szczególnego podkreślenia.

Recenzowana praca doktorska podzielona jest na pięć rozdziałów merytorycznych:

1. Podstawowe pojęcia.
2. Ideałowe wersje twierdzenia Levy'ego-Steinitza.
3. Rozszerzalność do ideału sumowalnego.
4. Permutacje osiowe.
5. Odwzorowania osiowe.

Wyróżnione więc mamy tu trzy główne obszary tematyczne.

Praca napisana jest w sposób skondensowany, nie zawiera żadnych zbytecznych uwag. Autor skupił się wyłącznie na wyeksponowaniu własnych wyników, co jest niezwykle cenne, zwłaszcza, że jest ich sporo. Podkreślić należy swobodny styl autora, świadczący o bardzo głębokim opanowaniu rzemiosła. W wielu dowodach prezentowanych w pracy wyników, wyłapać można specyficzne skróty myślowe, nie wynikające bynajmniej z ignorancji autora względem potencjalnego czytelnika, ale z perfekcyjnego wyczucia niuansu technicznego, adekwatnego do rozważanej sytuacji.

Przejdźmy do recenzji poszczególnych rozdziałów pracy dyskutowanej pracy doktorskiej.

Rozdział pierwszy w sposób zwięzły omawia podstawowe pojęcia wykorzystane w pozostałych czterech rozdziałach pracy. Mamy tu również, delikatnie podkreślony, rys historyczno-faktograficzny dyskutowanych w pracy zagadnień.

Uwagi:

a) w definicji zbioru $S_\varepsilon(u)$ można założyć, że $u \neq 0$ i dopisać dodatkowo, że: $\langle \frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|} \rangle = \cos(\angle(u,v)) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Chciałbym nadmienić, że wektory Levy'ego, ale rozważane od strony geometryczno-topologicznej, występują też w wynikach gliwickich uczniów profesora Zahorskiego, panów Sowy i Timmlera. Mimo wszystko, dodałbym w tym rozdziale nieco więcej odnośników do źródeł faktograficznych. Przyjęta w pracy definicja nośnika – zobacz nagłówek na stronie 16-tej – jest zgodna z ogólną definicją nośnika odwzorowania określonego na przestrzeni topologicznej (w pracy chodzi o topologię dyskretną na zbiorze ω dla odwzorowań $f\colon \omega \to \omega$).

Rozdział drugi. Mamy tu ciąg pięknych wyników, których dowody są przejrzyste. Oczywiście naszło mnie tutaj wiele refleksji, z częścią podzielę się za moment, ale najpierw napiszę, że rozdział ten pozostawia wiele otwartych tematów. Jest to rozdział obszerny, ale nadal obiecujący – przecież to bardzo pocieszające z perspektywy dalszej pracy naukowej doktoranta.

Uwagi:

a) w dowodzie twierdzenia 2.1.1:

   — należy założyć, że $w^\perp \neq 0$;

   — fakt, że $\alpha_c = \alpha$ jest konsekwencją bezwzględnej zbieżności szeregu $\sum_{n\in\omega} \alpha_n \omega$, czyli powinien być zamieszczony po kolejnym zdaniu, lub lepiej, po drugim w kolejności zdaniu;

b) w dowodzie twierdzenia 2.2.1:

   — r zastąpić przez a w opisie kuli $B(a, \varepsilon)$;

   — ze względu na dowolność wyboru wektora $w = [\alpha, \beta]$ – stosujemy twierdzenie 1.2.10;

— podkreślić należy, że twierdzenie 2.2.1 wraz z podanym dowodem, po niezbędnych korektach technicznych wynikających ze zmiany wymiaru rozważanej przestrzeni, przenosi się na dowolną przestrzeń skończenie wymiarową;

c) odnośnie twierdzenia 2.2.2:

— wprost z konstrukcji ciągu $(N_k)_{k\in\omega}$ w dowodzie tego twierdzenia można utworzyć nieskończoną partycję zbioru ω, taką jak we wniosku 2.2.3 (nie jest więc niezbędny dodatkowy dowód indukcyjny - jak sugeruje autor). Można przykładowo przyjąć:

$$\begin{aligned}
A_1 &= [N_0, N_1) \cup [N_1, N_2) \cup [N_3, N_4) \cup [N_6, N_7) \cup \ldots, \\
A_2 &= [N_2, N_3) \cup [N_4, N_5) \cup [N_7, N_8) \cup \ldots, \\
A_3 &= [N_5, N_6) \cup [N_8, N_9) \cup \ldots, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

— sądzę, że tezę wniosku 2.2.3 można wzmocnić tak, by sumy poszczególnych szeregów były równe z góry narzuconym wartościom rzeczywistym;

d) odnośnie lematu 2.2.15:

— istotnie uzupełnia twierdzenie 1.2.10 i, rzecz jasna, lemat ten, może być uogólniony w podobnej manierze na przestrzenie $\mathbb{R}^n$;

e) w dowodzie twierdzenia 2.2.16:

— $(i) \Rightarrow (ii)$: dopisać, że ze względu na dowolność wyboru ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wynika teza.

Rozdział trzeci, o rozszerzalności ideałów, należy do fundamentalnych w tematyce ideałowej. Ładne i przejrzyste są zarówno wyniki jak i ich dowody. Praktycznie nie mam uwag (w dowodzie lematu 3.2.2 literówka w definicji zbioru $\mathcal{P}_n + 1$: ma być $\mathcal{P}_n$ a nie P_n).

Rozdział czwarty pod tytułem: Permutacje osiowe. Przedstawione wyniki uzupełniają i istotnie wzmacniają dotychczasowy stan wiedzy w tym temacie. Również i w tym rozdziale wiele dowodów idzie o krok dalej, aniżeli dowodzone fakty. W tej tematyce drzemie jeszcze spory potencjał. Sądzę, że autor jest tego świadomy i wykorzysta to w swoich przyszłych badaniach.

Rozdział piąty, dotyczący odwzorowań osiowych. Rozpocznę od uwagi na temat lematu 5.1.1, który można uzupełnić komentarzem, że przy podanych założeniach klasy abstrakcji relacji $\sim$ są orbitami odwzorowania m. Można tę uwagę wykorzystać do podania alternatywnych dowodów, a nawet nowych faktów. Podane w tym rozdziale przykłady dobrze ilustrują dyskusję, wyniki są ciekawe, a dowody obiecują jeszcze więcej – czego bardzo Autorowi życzę.

Podsumowanie.

Pomimo i tak nielicznych uwag krytycznych, sformułowanych przeze mnie w recenzji, przeważnie okołoredakcyjnych, praca doktorska Pawła Klingi jest naprawdę bardzo dobra. Ciekawe wyniki, topowa tematyka, bogata warstwa techniczna i przede wszystkim żarliwa pasja badawcza. To wszystko cechy pracy zasługującej nie tylko na zauważenie, ale i na wyróżnienie. Nie mam cienia wątpliwości, że wyniki pana magistra Pawła Klingi, przedstawione w jego pracy doktorskiej, są wartościowe i stanowią istotny wkład naukowy w dyskutowaną tematykę. Dlatego uważam, że praca doktorska Pawła Klingi spełnia z wyróżnieniem wymagania stawiane pracom doktorskim przez Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, Poz. 595) i stawiam wniosek o dopuszczenie jej do publicznej obrony w dyscyplinie Matematyka.

Roman Witu