RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR HANNY WOJEWÓDKI

ANNA ZDUNIK

Rozprawa doktorska pani mgr Hanny Wojewódki dotyczy grupy zagadnień związanych ze stochastycznymi własnościami pewnej klasy operatorów Markowa. Jakkolwiek zagadnienie czysto teoretyczne jest wystarczajaco interesujące, dodatkową motywacją do badania wybranej klasy operatorów jest możliwe zastosowanie w biologii do opisanego pokrótce w rozprawie prostego modelu cyklu komórkowego.

1. Omówienie zawartości rozprawy

Rozprawa składa się z siedmiu rozdziałów. Pierwszy rozdział wprowadza definicje obiektów badanych w pracy i omawia ich podstawowe własnosci.

Rozdział 2. opisuje proces Markowa modelujący cykl komórkowy. Model ten był badany wcześniej w pracach Lasoty i Mackey'a. Autorka formułuje w tym miejscu założenia (I-VI, oraz, mocniejsze II' i II") o modelu, do których będzie odwoływała się w dalszych częściach pracy.

W Rozdziale 3. kontynuuje się badanie własności wprowadzonego modelu cyklu komórkowego, w szczególności sprawdza się że jest to operator fellerowski. W rozdziale tym dowodzi się także ważny lemat (Lemat 3.1) pokazujący jak zachowuje sie, przy braniu iteracji dowolnej miary, całka z funkcji odległości od ustalonego punktu; w szczególności- ze te całki pozostają wspólnie ograniczone. Funkcja ta, oznaczana dalej $V(x)$ jest funkcją Lapunowa dla badanego układu. Rozdział 4 zawiera opis podstawowego narzędzia używanego w pracy. Jest to bardzo elegancka konstrukcja specjalnej miary sprzęgającej (coupling). Konstrukcja ta została zaproponowana w pracy M. Hairera (pozycja [9] w bibliografii rozprawy); w omawianej rozprawie jest przedstawona w kontekście potrzebnym do badania konkretnego modelu.

Rozdział 5. zawiera najważniejszy, w moim przekonaniu, wynik rozprawy. Dowodzi się w nim, używając wspomnianej subtelnej kostrukcji miary sprzęgającej, oraz wcześniej wykazanych własności układu, że iteracje dowolnej miary dla której funkcja V ma skończoną całkę, dążą eksponencjalnie w metryce Fortreta–Mouriera do jedynej miary stacjonarnej. Tempo eksponencjalnej zbieżności nie zależy od wyjściowej miary. Głównym wynikiem technicznym jest Twierdzenie 5.3, w którym dowodzi się skończoności pewnej całki, co daje z kolei bardzo dobre szacowanie na miarę par trajektorii które "spotykają" się (ang. "coupled") po czasie nie dłuższym niż n. Następujące potem Lemat 5.2 oraz Twierdzenie 5.5 nie są automatycznymi wnioskami, i wymagają jeszcze sporo pracy, ale główną ideą pozostaje szacowanie zawarte w Twierdzeniu 5.3.

Rozdział 6. jest poświęcony dowodowi Centralnego Twierdzenia Granicznego dla badanego modelu, przy silniejszym dodatkowym (naturalnym w tym kontekście) założeniu II". Dowód przebiega dwustopniowo: w pierwszym kroku dowodzi się z wersji CLT dla rozkładu stacjonarnego (według koncepcji z pracy Maxwella i Woodroofe'a). W drugim kroku, korzystając z wykazanej wcześniej eksponencjalnej zbieżności, wnioskuje się CLT dla rozkładów sum wzdłuż trajektorii, startując z dowolnego rozkładu początkowego.

Ostatni, siódmy rozdział, rozwijając znaną z wcześniejszych zastosowań metodę martyngałową, dowodzi Prawa Iterowanego Logarytmu dla badanego systemu.

2. Ocena wyników rozprawy

Tematyka rozprawy lokuje się w głównym nurcie badań w probabilistyce i układach dynamicznych. Dość powiedzieć, że Martin Hairer, którego wyniki i metody były bodaj głowną motywacją omawianej pracy, został w ubiegłym roku uhonorowany Medalem Fieldsa.

Rozprawa jest niełatwa, i wymagała od Autorki opanowania znacznego materiału, i to takiego który w większości dotyczy nowych badań.

Jak wspomniano, główny dowód pracy (eksponencjalne tempo zbieżności iteracji operatora) jest oparty na strategii zaproponowanej przez M. Hairera. Cytowana praca Hairera dotyczyła zastosowań w stochastycznych równaniach różniczkowych. Ogólna strategia dowodu, naszkicowana przez niego, musi być adaptowana i rozwinięta dla konkretnej sytuacji, i takie rozwinięcie nie jest ani natychmiastowe, ani łatwe. Autorka wywiązała się bez zarzutu z tego ambitnego zadania.

Dowód CLT zawarty w Rozdziale 5. jest pomysłowym połączeniem dowodu w wersji "stacjonarnej" i wyników rozdziału 4 - czyli oszacowania tempa zbieżności do rozkładu stacjonarnego.

Wreszcie dowód LIL zawarty w rozdziale 7., jest przeprowadzony, co do zasady, wedlug strategii zapropowanej w pracy W.Bołta, A.Majewskiego i T.Szarka (pozycja [3] w bibliografii rozprawy). Oczywiście, i tutaj należało przeprowadzić dowód stosownie do badanego modelu, i zadbać o wiele szczegółow. Nie wydaje mi się jednak aby w tym miejscu pojawiła się jakaś nowa, szczególnie istotna trudność do pokonania.

3. Dodatkowe uwagi i komentarze

W komentarzu do Stwierdzenia 1.8 przydałby sie przykład- kiedy miara graniczna nie jest niezmiennicza, i krótkie uzasadnienie że w przypadku operatorów Fellerowskich- musi być niezmiennicza.

W formule (2.12) oznaczenie $\nu^{\varepsilon}_{S(x,t)}$ pojawia się bez wyjaśnienia.

str 18 w tym miejscu pojawiają się mylące oznaczenia Π_{ε} oraz Π_h.

Sformułowanie Lematu 3.1 jest dość niefortunne ("..stałe Λ_j i c nie zależą od wyboru ciągu stałych (h_i)"). Przecież te stałe, jak wiemy, pochodzą z wzorów (2.4), (2.15), (2,16).

Rozdział 4.1., Definicja miary sprzęgającej. W tym miejscu czytelnik zadaje sobie pytanie: po co konstruować, skoro zwykła miara produktowa spełnia warunki definicji. Zabrakło tu wyjaśniajacego komentarza o oczekiwanych dodatkowych własnościach miary sprzęgającej.

Lemat 7.4, początek dowodu. "Postępując analogicznie jak w dowodzie Lematu 7.3....". Zabrakło dokładniejszego wyjaśnienia.

Uwaga ogólna: rozprawa jest bardzo techniczna, i brakuje w niej, w tekście pracy, poza wstępem, dokładniejszego przedstawienia celów poszczególnych kroków dowodu. Ułatwiłoby to zadanie czytelnikowi.

Warto byłoby, moim zdaniem, poszukać innych jeszcze zastosowań omawianej w Rozdziałach 3 i 4 techniki Hairera w klasycznych ukladach dynamicznych. Pewne wyniki w tym kierunku zostały otrzymane w cytowanej w rozprawie pracy M. Ślęczki (pozycja [29] w bibliografii) oraz w poźniejszej pracy R. Kapicy i M. Ślęczki; dotyczą one dość regularnych iteracyjnych układów funkcyjnych.

4. Podsumowanie

W mojej opinii, Doktorantka wykazała się głeboką wiedzą, oraz umiejętnością pracy w niełatwych i nowoczesnych technikach. Otrzymane wyniki są bardzo naturalne, ciekawe i ważne. Bez zastosowania wspomnianych technik byłyby zapewne- a przynajmniej większość z nich - trudne do osiągnięcia. Dodatkowym walorem pracy jest związek otrzymanych wyników z zastosowaniami w modelowaniu konkretnych zjawisk interesujących biologów.

Nie mam wątpliwości że omawiana rozprawa spełnia, z nadmiarem, wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę zatem o dopuszczenie pani mgr Hanny Wojewódki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Anna Zdunik, Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski, ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa

Anna Zdunik

Warszawa, 8.06.2015