

Autoreferat

Dr Marcin Marek Markiewicz

14 grudnia 2021

Spis treści

1	Imię i nazwisko	3
2	Dyplomy, stopnie naukowe	3
3	Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych	3
4	Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy	4
4.1	Tytuł osiągnięcia	4
4.2	Lista wybranych publikacji	4
5	Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową	5
5.1	Wstęp	5
5.2	Motywacja i cele naukowe	6
5.3	Podsumowanie	7
5.3.1	Detekcja kwantowego splątania za pomocą osiągalnych eksperymentalnie obserwabli lokalnych	7
5.3.2	Nowe aspekty nieklasyczości Bella w odniesieniu do niskowymiarowych układów kwantowych	8
5.3.3	Nieklasyczne własności interferencji ze względu na nierozróżnialność cząstek	9
5.3.4	Nieklasyczne własności pojedynczego fotonu	9
5.4	Detekcja kwantowego splątania za pomocą osiągalnych eksperymentalnie obserwabli lokalnych	10
5.4.1	Relacja pomiędzy dwoma całkowicie odmiennymi koniecznymi i wystarczającymi kryteriami dwucząstkowego splątania	10
5.4.2	Detekcja splątania w dwukomponentowych układach bozonowych za pomocą kryterium geometrycznego	13
5.5	Nowe aspekty nieklasyczości Bella w odniesieniu do niskowymiarowych układów kwantowych	16
5.5.1	Maksymalna nieklasyczość Bella a maksymalne splątanie dla układów trójpoziomowych	16
5.5.2	Algorytmiczny opis nieklasyczości Bella	19
5.6	Nieklasyczne własności interferencji ze względu na nierozróżnialność cząstek	22
5.6.1	Uogólniony opis probabilistyczny wielofotonowej interferometrii oraz odtworzenie kwantowego prawdopodobieństwa grupowania się fotonów	22
5.6.2	Interferometryczne schematy generowania wielocząstkowych stanów splątanych z <i>niespotykaniem się</i> cząstek	25

5.7	Nieklasyczne własności pojedynczego fotonu	29
5.7.1	Kontekstualność pojedynczego fotonu a klasyczność fali elektromagnetycznej	29
5.7.2	Nieklasyczność Bella dla pojedynczego fotonu	34
6	Prezentacja osiągnięć dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę	40
6.1	Osiągnięcia dydaktyczne	40
6.2	Osiągnięcia organizacyjne	40
6.3	Osiągnięcia w popularyzowaniu nauki	40
7	Inne osiągnięcia naukowe	41
7.1	Dane bibliometryczne	41
7.2	Nagrody	41
7.3	Historia osiągnięć przed doktoratem	41
7.3.1	Badania uwzględnione w doktoracie:	41
7.3.2	Badania nieuwzględnione w doktoracie:	42
7.4	Dodatkowy dorobek po doktoracie	43

1 Imię i nazwisko

Marcin Marek Markiewicz

2 Dyplomy, stopnie naukowe

- **Doktorat z Fizyki** – wrzesień 2014.
Instytucja: Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański.
Rozprawa doktorska: Characterization and detection of multipartite entanglement.
Promotor: prof. dr hab. Marek Żukowski.
Recenzenci: prof. dr hab. Marek Kuś, prof. dr hab. Antoni Wójcik.
Obrona rozprawy doktorskiej: 02.09.2014, Gdańsk.
Nadanie stopnia naukowego doktora nauk fizycznych: 25.09.2014, Gdańsk.
Stypendium: Międzynarodowy Projekt Doktorancki: *Physics of future quantum-based information technologies*, grant MPD/2009-3/4 Fundacji na rzecz Nauki Polskiej.
- **Praca Magisterska z Fizyki** – lipiec 2009.
Instytucja: Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański.
Praca magisterska: Przesyłanie stanów kwantowych przez łańcuchy spinowe.
Promotor: prof. dr hab. Marek Żukowski.
Ocena: bardzo dobry.

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- 01.01.2020 – do teraz: **Adiunkt**
Instytucja: Międzynarodowe Centrum Teorii Technologii Kwantowych, Uniwersytet Gdański;
Przełożony: prof. Marek Żukowski.
Zagadnienia badawcze: optyka kwantowa, podstawy mechaniki kwantowej;
- 01.10.2015 – 30.09.2018: **Adiunkt naukowy**
Instytucja: Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński;
Przełożony: prof. Karol Życzkowski.
Zagadnienia badawcze: kwantowe korelacje w układach wielopoziomowych;
- 01.07.2015 – 30.06.2016: **Adiunkt naukowy**
Instytucja: Centrum Fizyki Teoretycznej PAN, Warszawa;
Przełożony: prof. Marek Kuś.
Zagadnienia badawcze: korelacje w uogólnionych teoriach probabilistycznych;
- 01.07.2014 – 30.06.2015: **Asystent naukowy**
Instytucja: Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski;
Przełożony: dr hab. Rafał Demkowicz-Dobrzański.
Zagadnienia badawcze: kwantowa metrologia, algorytmy kwantowe;

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy

4.1 Tytuł osiągnięcia

Cykl powiazanych tematycznie artykułów naukowych, pod tytułem: *Przejawy nieklasyczności w układach kwantowomechanicznych i kwantowoptycznych.*

4.2 Lista wybranych publikacji

Lista publikacji powiazanych tematycznie:

1. *Efficient linear optical generation of a multipartite W state*
Paweł Błasiak, Ewa Borsuk, Marcin Markiewicz, Yong-Su Kim
Physical Review A **104**, 023701, sierpień 2021.
2. *Can single photon excitation of two spatially separated modes lead to a violation of Bell inequality via weak-field homodyne measurements?*
Tamoghna Das, Marcin Karczewski, Antonio Mandarino, Marcin Markiewicz, Bianka Wołoncewicz, Marek Zukowski
New Journal of Physics **23**(7), 073042, lipiec 2021.
3. *Entangling three qubits without ever touching*
Paweł Błasiak, Marcin Markiewicz
Scientific Reports **9**(1), 20131, grudzień 2019.
4. *From contextuality of a single photon to realism of an electromagnetic wave*
Marcin Markiewicz, Dagomir Kaszlikowski, Paweł Kurzyński, Antoni Wójcik
npj Quantum Information **5**(1), 5, styczeń 2019.
5. *Unified approach to geometric and positive map-based nonlinear entanglement identifiers*
Marcin Markiewicz, Adrian Kołodziejski, Zbigniew Puchała, Adam Rutkowski, Tomasz Tylec, Wiesław Laskowski
Physical Review A **97**, 042339, kwiecień 2018.
6. *Generalized probabilistic description of noninteracting identical particles*
Marcin Karczewski, Marcin Markiewicz, Dagomir Kaszlikowski, Paweł Kurzyński
Physical Review Letters **120**, 080401, luty 2018.
7. *Investigating nonclassicality of many qutrits by symmetric two qubit operators*
Marcin Markiewicz, Kamil Kostrzewa, Adrian Kołodziejski, Paweł Kurzynski, Wiesław Laskowski
Physical Review A **94**, 032119, wrzesień 2016.
8. *Probing the quantum–classical boundary with compression software*
Hou Shun Poh, Marcin Markiewicz, Paweł Kurzynski, Alessandro Cerè, Dagomir Kaszlikowski, Christian Kurtsiefer
New Journal of Physics **18**(3), 035011, marzec 2016.
9. *Correlation-based entanglement criterion in bipartite multiboson systems*
Wiesław Laskowski, Marcin Markiewicz, Danny Rosseau, Tim Byrnes, Kamil Kostrzewa, Adrian Kołodziejski
Physical Review A **92**, 022339, sierpień 2015.

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową

Prezentowane osiągnięcie naukowe ma formę publikacji zbiorowych. Mój wkład w powstanie tych prac został opisany w rozdziale I.2 załączonego dokumentu “Wykaz osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny”, natomiast wkład pozostałych autorów w formie ich oświadczeń jest załączony jako osobny dokument.

W niniejszej prezentacji posługuję się następującymi konwencjami odnośnie referencji:

- publikacje należące do serii habilitacyjnej są cytowane jako [H1]-[H9],
- inne publikacje, których jestem współautorem, nienależące do serii są cytowane jako [O1]-[O24],
- pozostałe publikacje są cytowane jako [E1]-[E73].

5.1 Wstęp

Teoria kwantowa istotnie odróżnia się od fizyki klasycznej zarówno na poziomie koncepcyjnym jak i na poziomie formalizmu. Termin *nieklasycyzm* odnosi się do efektów powiązanych z mechaniką kwantową, które nie mają swojego klasycznego odpowiednika. Najistotniejsze zjawiska nieklasyczne, które będą opisywane w niniejszej prezentacji mojego osiągnięcia naukowego to: *kwantowe splątanie*, *fundamentalna nierozróżnialność cząstek*, *nieklasycyzm Bella* i *kontekstualność*. Dwa pierwsze spośród tych zjawisk są bezpośrednio wbudowane w formalizm mechaniki kwantowej, podczas gdy pozostałe dwa są sformułowane w języku probabilistycznym *poza* mechaniką kwantową i charakteryzują ją w sensie negatywnym, pokazując, że pewne przewidywania kwantomechaniczne stoją w sprzeczności z klasycznymi intuicjami związanymi z modelowaniem probabilistycznym. Wszystkie wspomniane przejawy nieklasycyzmu mają wspólną cechę, są mianowicie powiązane z korelacjami wyników pomiarów. Ponieważ zaś korelacje są kluczowym elementem wszelkich analiz teorii informacyjnych, wszystkie te elementy nieklasycyzmu są centralnym obiektem zainteresowania dla kwantowego przetwarzania informacji. Poniżej prezentuję krótką charakterystykę każdego z czterech interesujących nas przejawów nieklasycyzmu.

Kwantowe splątanie [E33] to zjawisko, w którym rozseparowane podukłady wykazują silne skorelowanie różnych własności, przy czym własności te są lokalnie niewspółmieralne, tak, że w jednym eksperymencie można zmierzyć tylko jedną wybraną korelację. Ta własność niewspółmieralności powoduje, że splątane korelacje wykazują częściowo *kontrafaktyczny* charakter. Istotnie, jeśli lokalni obserwatorzy zmierzyliby na swoich podukładach obserwabla odpowiadające innym własnościom, niż te które *aktualnie* zmierzyliby, również otrzymaliby silne korelacje, ale nie mogą mierzyć tych dwóch korelacji jednocześnie. Taką kontrafaktyczność jest skutkiem kwantowej komplementarności. Na poziomie formalizmu, splątanie oznacza niefaktoryzowalność stanu całego rozważanego układu. Skutkiem tej niefaktoryzowalności jest to że splątane układy mają dobrze określone własności globalne (korelacje), a jednocześnie mają mocno rozmyte własności lokalne (lokalne wyniki pomiarów cechują się istotną losowością).

Nierozróżnialność cząstek kwantowych [E7] to fundamentalna cecha mechaniki kwantowej, dzięki której cząstki o tych samych wartościach wszystkich wewnętrznych stopni swobody są istotnie nierozróżnialne. Oznacza to, że nie mogą one zostać indywidualnie zaadresowane zarówno za pomocą metod eksperymentalnych jak i w teorii, za pomocą

jakiegokolwiek ukrytego oznakowania. W kontekście optyki kwantowej nierozróżnialność fotonów jest podstawą silnie nieklasycznych efektów interferencyjnych. Najbardziej znany jest efekt Hong-Ou-Mandla [E30], w którym dwa identyczne fotony wchodzi dwoma różnymi wejściami do symetrycznego dzielnika wiązki. Obserwuje się wówczas, że fotony zawsze wychodzą parami, a nigdy w koincydencji. Efekt ten, zwany również grupowaniem fotonów, jest spowodowany kasowaniem się amplitud prawdopodobieństwa dla zdarzeń, w których fotony wychodzą z dzielnika różnymi ścieżkami. Inny efekt interferencyjny ze względu na nierozróżnialność fotonów został zaproponowany w pracach Yurke i Stolera [E73, E72], w których interferencja fotonów z niezależnych źródeł prowadzi do korelacji indentycznych jak w przypadku stanów splątanych.

Nieklasyczność Bella [E12] (często określana myląco terminem *nielokalność*) jest dobrze ugruntowanym pojęciem w badaniach podstawowych nad mechaniką kwantową, które sprowadza się do tego, że korelacje wyników lokalnych pomiarów dokonanych na rozseparowanych przestrzennie podukładach układu wielocząstkowego, nie mogą być modelowane za pomocą klasycznego opisu probabilistycznego. Opis ten zakłada następujące cechy: *realizm* (mierzone wielkości fizyczne mogą być reprezentowane przez klasyczne zmienne losowe), *lokalność* (brak komunikacji pomiędzy podukładami) i *wolny wybór ustawień pomiarowych* (wybór ustawień jest zdekorelowany z jakimikolwiek procesami fizycznymi ze wspólnej przeszłości, w sensie szczególnej teorii względności, całego eksperymentu). Nieklasyczność Bella jest demonstrowana za pomocą wykazania łamania pewnej nierówności Bella. Nierówność Bella jest spełniona przez wszelkie procesy, które *łącznie* spełniają założenia realizmu, lokalności i wolnego wyboru. Zatem łamanie nierówności Bella oznacza, że z punktu widzenia klasycznego modelowania probabilistycznego, przynajmniej jedno z powyższych założeń musi być nieprawdziwe.

Kontekstualność [E13] jest koncepcją podobną, acz bardziej ogólną od nieklasyczności Bella. Sprowadza się ona w zasadzie do łamania założenia realizmu w podejściu Bellowskim, przy czym może być ona sformułowana w stosunku do pojedynczego układu fizycznego, bez konieczności dzielenia go na podukłady. Mówimy, że układ fizyczny opisywany zbiorem obserwabli $\{A_i\}$ jest *niekontekstualny*, jeśli istnieje łączny rozkład prawdopodobieństwa dla wartości tych obserwabli, co operacyjnie oznacza, że są one współmieralne. W przeciwnym razie układ jest *kontekstualny*, co oznacza, że istnieją jedynie podzbiory obserwabli $\{C_i\}$, zwane *kontekstami*, dla których istnieje rozkład łączny, ale rozkłady te nie mogą być rozszerzone do jednego wspólnego rozkładu, którego byłyby marginalami.

5.2 Motywacja i cele naukowe

Zaprezentowane nieklasyczne aspekty teorii kwantowej mają istotne znaczenie na dwóch poziomach, zarówno dla badań fundamentalnych nad mechaniką kwantową, jak i dla praktycznych zastosowań, znanych pod nazwą *technologii kwantowych*. Istotnym jest, że te dwa poziomy wzajemnie się przeplatają, a to przeplatanie się jest charakterystyczną cechą nowej multidyscyplinarnej dziedziny, zwanej kwantową teorią informacji. Przyjrzyjmy się nieco dokładniej temu przeplataniu. Z jednej strony obecność *kwantowego splątania* jest warunkiem koniecznym do zaobserwowania nieklasyczności Bella, z drugiej jest też niezbędna w dziedzinie kwantowych obliczeń, w implementacji algorytmów kwantowych oferujących wykładniczą przewagę w złożoności nad algorytmami klasycznymi [E41] jak również w kwantowej metrologii, dla uzyskania ponadklasycznej precyzji estymacji nieznanymi parametrów [E26]. Okazuje się również, że te dwa powyższe aspekty, algorytmiczny i metrologiczny, są ze sobą ściśle powiązane [O6]. *Nierozróżnialność cząstek kwantowych* jest podstawą protokołów generowania splątanych korelacji [E73, E72, E36], ale jest również

obiektem rozważań fundamentalnych, zawartych w prezentacji mojego osiągnięcia, związanych ze strukturą opisu kwantowej interferometrii [H4], jak również z granicą kwantowo-klasyczną dla układów optycznych [H6]. *Nieklasycyzm Bella* jest centralnym obiektem rozważań fundamentalnych nad mechaniką kwantową, zgodnie z którym pewne korelacje w układach kwantowych nie mogą być odtworzone za pomocą modelu zmiennych ukrytych spełniających intuicyjne klasyczne własności, ale jednocześnie jest też podstawą bezpieczeństwa protokołów kwantowej generacji kluczy kryptograficznych [E54] jak również służy do generacji prawdziwej losowości [E47]. *Kontekstualność* jest głównym narzędziem badań nad nieklasycyzmem pojedynczych układów kwantowych, ale jednocześnie jest istotnym zasobem dla obliczeń kwantowych [E34].

Celem prezentowanych badań w ramach mojego osiągnięcia naukowego było istotne poszerzenie wiedzy na temat czterech aspektów nieklasycyzmu: splątania, nierozróżnialności, nieklasycyzmu Bella i kontekstualności, jak również wzajemnych powiązań pomiędzy nimi, zarówno w kontekście rozważań fundamentalnych jak i praktycznych zastosowań kwantowej teorii informacji. Szczegółowe cele podjętych badań można sformułować następująco:

- rozwijanie teorii przyjaznych eksperymentalnie metod detekcji splątania, jak również metod generacji splątania wykorzystujących nierozróżnialność fotonów,
- badanie strukturalnych aspektów teorii kwantowej związanych z interferencją ze względu na nierozróżnialność fotonów,
- badanie niedostatecznie zrozumiałych aspektów nieklasycyzmu Bella, takich jak niespójność pomiędzy maksymalnym splątaniem a maksymalną nieklasycyzmem Bella, czy też możliwość sformułowania nieklasycyzmu Bella poza schematem probabilistycznym,
- badanie nieklasycznych własności pojedynczego fotonu.

5.3 Podsumowanie

Prezentowane osiągnięcie naukowe w formie zbioru powiązanych tematycznie publikacji skupia się na badaniu czterech aspektów nieklasycyzmu układów fizycznych rozważanych w kwantowej teorii informacji.

5.3.1 Detekcja kwantowego splątania za pomocą osiągalnych eksperymentalnie obserwabli lokalnych

Tensor korelacji to reprezentacja macierzy gęstości wielocząstkowego układu kwantowego w produktowej bazie złożonej z operatorów Hermitowskich. Teoria detekcji splątania w oparciu o lokalne pomiary elementów tensora korelacji sięga pracy Badziąga i innych [E6], w której podano konieczne i wystarczające kryterium dla wykluczenia pełnej separowalności stanu kwantowego układu wielocząstkowego. Kryterium to ma geometryczne korzenie, co wynika z faktu, że zbiór tensorów korelacji ma strukturę przestrzeni Euklidesowej z naturalnie zdefiniowanym iloczynem skalarnym. Zostało ono później rozszerzone [O11, O16, O12] w celu charakteryzacji *częściowej separowalności* w układach wielocząstkowych.

Pomimo sukcesów w rozwoju geometrycznych kryteriów splątania, pewne kwestie ich dotyczące wciąż pozostawały otwarte. Jedną z nich, czysto teoretyczną, była kwestia relacji pomiędzy kryterium geometrycznym a kryterium Peresa-Horodeckich, opartym na odzworowaniach dodatnich [E31]. Oba te kryteria detekcji dwucząstkowego splątania są konieczne i wystarczające, wyznaczają więc ten sam zbiór stanów. Zasadne jest zatem

pytanie o ich wzajemną relację. Drugi istotny problem, związany bardziej ze sferą zastosowań, dotyczył możliwości dopasowania kryterium geometrycznego do detekcji splątania dla układów cząstek nierozróżnialnych.

Oba te problemy zostały podjęte w pracach [H7, H5]. W pracy [H7] przedstawiliśmy rozwiązanie problemu relacji pomiędzy geometrycznym, a opartym na odwzorowaniach dodatnich kryterium splątania dwucząstkowego. W tym celu rozszerzyliśmy kryterium geometryczne do czysto algebraicznego, którego kryterium geometryczne jest szczególnym przypadkiem. Następnie podaliśmy konstrukcję kryterium opartego o odwzorowanie dodatnie, które bezpośrednio odpowiada kryterium algebraicznemu. Okazało się również, że wprowadzone rozszerzenie kryterium geometrycznego prowadzi do bardziej efektywnych indykatorów splątania, co pokazuje, że początkowe czysto geometryczne sformułowanie kryterium splątania [E6], [O11] było nazbyt restrykcyjne.

Problem dostosowania kryterium geometrycznego do układów cząstek nierozróżnialnych został częściowo rozwiązany w pracy [H5], w której zaproponowano kryterium splątania dla dwukomponentowego układu dwumodowych bozonów. Zakłada się w nim, że dwa komponenty układu są od siebie odróżnialne, ale cząstki w ramach każdego z komponentów są fundamentalnie identyczne. Taki hybrydowy scenariusz pozwala na konstrukcję efektywnych indykatorów splątania, które mogą mieć zastosowanie do detekcji splątania w eksperymentalnie osiągalnych układach, takich jak dwukomponentowe kondensaty Bosego-Einsteina.

5.3.2 Nowe aspekty nieklasyczości Bella w odniesieniu do niskowymiarowych układów kwantowych

W pracach [H9, H8] poruszono dwa słabo rozumiane aspekty nieklasyczości Bella. Pierwszy z nich, omówiony w pracy [H8] dotyczy relacji pomiędzy nieklasyczością Bella a splątaniem. Od dawna wiadomo było, że dla układu dwóch kubitów (dwóch układów dwupoziomowych) optymalne nierówności Bella są maksymalnie łamane przez stany maksymalnie splątane. Okazało się jednak, że w przypadku układów wyżej wymiarowych relacja pomiędzy splątaniem a nieklasyczością Bella jest niejasna, mianowicie okazało się, że optymalne nierówności Bella są maksymalnie łamane przez stany niemaksymalnie splątane. Praca [H8] podaje możliwe wyjaśnienie tego efektu w przypadku dwóch kubitów (dwóch układów trójpoziomowych), jak również daje częściowe wyjaśnienie w przypadku trzech kubitów.

Drugi aspekt, podjęty w pracy [H9], dotyczy pytania, czy da się sformułować nieklasyczość Bella w sposób bardziej ogólny, niż ten oparty o statystyczną analizę korelacji. W [H9] zaproponowano całkowicie nowe podejście do nierówności Bella, oparte na pojęciu złożoności algorytmicznej. Złożoność algorytmiczna to abstrakcyjne pojęcie z teorii obliczeń, w którym złożoność ciągu danych definiuje się poprzez długość najkrótszego programu, zakodowanego w jakimś ustalonym uniwersalnym modelu obliczeń, który jest w stanie te dane odtworzyć. Mimo tego, że jest to wielkość nieobliczalna, może być ona dobrze przybliżona za pomocą algorytmów kompresji. W pracy [H9] wprowadzono nierówność Bella, która wyrażona jest za pomocą znormalizowanych długości skompresowanych zbiorczych wyników z eksperymentu Bellowskiego. Opisano również przeprowadzony eksperyment Bellowski, który wykazał łamanie tej nierówności w oparciu o pomiary przeprowadzone na parze splątanych polaryzacyjnie fotonów. Rezultat ten otwiera możliwość całkowicie algorytmicznej, a nie probabilistycznej, analizy nieklasyczości Bella, zarówno na poziomie teoretycznym, jak i eksperymentalnym.

5.3.3 Nieklasyczne własności interferencji ze względu na nierozróżnialność cząstek

Prace [H4, H2, H1] poświęcone są głębszemu zrozumieniu dwóch rodzajów interferencji ze względu na nierozróżnialność cząstek. Pierwszym rodzajem jest interferencja typu Hong-Ou-Mandla [E30], która prowadzi do grupowania się fotonów w ścieżkach wyjściowych z optycznego multiportu, drugim jest interferencja Yurke-Stolera [E73, E72] cząstek nierozróżnialnych z niezależnych źródeł. W pracy [H4] zbadaliśmy zjawisko grupowania się fotonów w modach wyjściowych z optycznego tritera (multiportu z trzema ścieżkami wejściowymi i wyjściowymi). Już wcześniej było wiadomo, że zjawisko grupowania się fotonów na wyjściach z tritera jest słabsze niż na wyjściach z dzielnika wiązki (czyli optycznego dwu-portu). Istotnie, trzy fotony wchodzące do tritera wszystkie różnymi ścieżkami opuszczają triter w sposób zgrupowany (trójkami) z prawdopodobieństwem co najwyżej $\frac{2}{3}$ [E17]. Powstaje pytanie, czy istnieje głębsza przyczyna braku pełnego grupowania się fotonów w tym przypadku. W pracy [H4] zaproponowaliśmy uogólniony model probabilistyczny dla optycznych multiportów. Podaliśmy założenia fizyczne, sformułowane w ramach tego modelu niezależnie od formalizmu mechaniki kwantowej, które pozwalają na odtworzenie maksymalnego prawdopodobieństwa grupowania się fotonów na wyjściach z tritera.

Prace [H2, H1] poświęcone są uogólnieniu idei interferencji typu Yurke-Stolera [E73, E72] na przypadek wielofotonowy. Zaproponowaliśmy schemat interferometryczny, który pozwala na tworzenie wielocząstkowych stanów splątanych za pomocą pasywnych urządzeń optycznych (dzielników wiązki i płytek fazowych), wychodząc ze stanu produktowego wielu fotonów. Najciekawszą własnością tego schematu jest własność *niespotykania się*, która mówi, że fotony, które ostatecznie dają wkład do nieklasycznych korelacji (przeszły proces *postselekcji*) nigdy nie spotkały się w żadnym miejscu w interferometrze. Na nierozróżnialność cząstek można patrzeć na dwa sposoby. Może być ona traktowana jako fundamentalna cecha cząstek kwantowych, bez żadnej struktury wewnętrznej (obraz *drugiej kwantyzacji*), ale może być również traktowana jako wynikająca z symetryzacji (bądź antysymetryzacji) funkcji falowych poszczególnych cząstek (obraz *pierwszej kwantyzacji*). Jeśli przyjmiemy drugi punkt widzenia, wówczas splątanie wynikające z symetryzacji funkcji falowych wydaje się być matematycznym artefaktem, ponieważ w eksperymencie nie da się zaadresować poszczególnych cząstek z osobna. Splątanie uzyskiwane na wyjściu protokołu z niespotykaniem się cząstek może być traktowane jako wynikające z "odblokowania" ukrytego splątania symetryzacyjnego. W pracy [H2] podajemy konstrukcję schematów do generacji trójcząstkowych stanów maksymalnie splątanych (tzw. *stany GHZ* i *stany W*), natomiast w pracy [H1] proponujemy ogólny protokół generacji *stanu W* dla dowolnej ilości cząstek.

5.3.4 Nieklasyczne własności pojedynczego fotonu

Pytanie o to, czy pojedynczy foton przejawia nieklasyczne własności korelacyjne jest tematem długiej debaty, i w zasadzie wciąż nie ma na nie jednoznacznej odpowiedzi. Wiadomo, że pojedynczy foton w interferometrze może przejawiać zachowanie kontekstualne [E5]. Jednocześnie zachowanie to może być zasymulowane przez model lokalnych zmiennych ukrytych, w którym lokalność oznacza propagowanie się informacji jedynie poprzez ścieżki optyczne [E9, E10]. Jednym z ważnych aspektów optyki kwantowej jest fakt, że amplitudy prawdopodobieństwa pojedynczego fotonu propagują się w interferometrze w sposób identyczny jak klasyczne fale elektromagnetyczne. Ta odpowiedniość była motywacją dla szeregu prac, których celem było wykazanie, że klasyczne fale również przejawiają własności kontekstualne [E65, E66, E57, E4, E28]. W pracy [H6] pokazujemy, że takie stwierdzenia

są całkowicie błędne. Okazuje się, że klasyczne fale elektromagnetyczne nie mogą przejawiać zachowań kontekstualnych, ponieważ nie mogą one odtworzyć struktury pojedynczych zliczeń detektorów, charakterystycznej dla eksperymentów optycznych ze stanami o małej liczbie fotonów.

Problem nieklasyczności Bella korelacji generowanych przez pojedynczy foton w superpozycji dwóch modów przestrzennych został po raz pierwszy postawiony w pracy Tana, Wallsa i Colletta (TWC) [E67]. Autorzy [E67] zaproponowali schemat pomiarowy oparty o detekcję homodynową z pomiarami różnic intensywności w lokalnych modach wyjściowych i wykazali łamanie pewnej nierówności Bella przez korelacje generowane pojedynczym fotonem. Wynik ten był przez lata traktowany jako dobrze uzasadniony dowód Bellowskiej nieklasyczności pojedynczego fotonu, trafił nawet do klasycznego podręcznika optyki kwantowej (patrz [E71], strona 264). Jednakże w niedawnej pracy [O5] pokazaliśmy istnienie pełnego modelu lokalnych zmiennych ukrytych dla prawdopodobieństw wyników w schemacie TWC. A zatem schemat ten nie może wykazywać nieklasyczności Bella. W pracy [H3] wyjaśniamy, jakie jest źródło błędu w rozumowaniu TWC i pokazujemy, jak należy zmodyfikować ich schemat, aby uzyskać niepodważalny dowód nieklasyczności Bella dla korelacji generowanych przez pojedynczy foton za pomocą pomiarów homodynowych ze słabym lokalnym oscylatorem. Dochodzimy jednak do wniosku, że zaobserwowana nieklasyczność Bella nie może być przypisana do pojedynczego fotonu. Jest ona konsekwencją interferencji ze względu na nierozróżnialność pomiędzy pojedynczym fotonem stanu wejściowego a fotonami pochodzącymi z lokalnych oscylatorów.

5.4 Detekcja kwantowego splątania za pomocą osiągalnych eksperymentalnie obserwabli lokalnych

5.4.1 Relacja pomiędzy dwoma całkowicie odmiennymi koniecznymi i wystarczającymi kryteriami dwucząstkowego splątania

Problem pełnej charakteryzacji splątania był jednym z głównych problemów dla rozwijającej się kwantowej teorii informacji. W kontekście układów dwucząstkowych problem ten został rozwiązany w 1996 r. w pracy Horodeckich [E31], w której sformułowano następujący warunek:

$$\rho \text{ jest splątany} \iff \exists \Lambda (\mathbb{1} \otimes \Lambda)[\rho] \not\geq 0, \quad (1)$$

który oznacza, że dwucząstkowy stan ρ jest splątany wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dodatnie (ale nie całkowicie dodatnie) odwzorowanie Λ , którego lokalne działanie na jeden z podukładów transformuje macierz gęstości stanu do macierzy niedodatnio określonej. W przypadku układów 2×2 i 2×3 (kubit-kubit i kubit-kutrit) istnieje uniwersalne odwzorowanie, mianowicie transpozycja \mathcal{T} , które jest wystarczające dla kryterium splątania [E53]:

$$\rho \text{ jest splątany} \iff (\mathbb{1} \otimes \mathcal{T})[\rho] \not\geq 0, \quad (2)$$

natomiast już w przypadku układów 3×3 (dwa kutrity) nie istnieje skończona rodzina odwzorowań dodatnich, która charakteryzowałaby splątanie [E63]. Kryterium splątania (2) nazywa się powszechnie *kryterium PPT* (Positive Partial Transpose).

Pomimo formalnej prostoty warunek (1) jest trudny do bezpośredniego zastosowania, stąd nie ustawały wysiłki w poszukiwaniu kryteriów splątania przyjaźniejszych w kontekście eksperymentalnym. Kryterium takie zostało zaproponowane w pracy Badziąga i innych [E6]:

$$\rho \text{ jest splątany} \iff \exists_G \max_{\sigma_{\text{prod}}} \text{Tr}(\rho G[\sigma_{\text{prod}}]) < \text{Tr}(\rho G[\rho]), \quad (3)$$

w którym maksymalizacja jest przeprowadzana po zbiorze wszystkich stanów czystych produktowych. Odwzorowanie G jest liniowe, zachowujące Hermitowskość, oraz spełniające specyficzny warunek dodatniości:

$$\text{Tr}(\rho G[\rho]) \geq 0, \quad (4)$$

który musi zachodzić dla dowolnego stanu ρ . Dzięki temu warunkowi wyrażenie $(\rho_1, \rho_2)_G = \text{Tr}(\rho_1 G[\rho_2])$ może być traktowane jako iloczyn skalarny indukujący półnormę $\|\rho\|_G = \sqrt{(\rho, \rho)_G} = \sqrt{\text{Tr}(\rho G[\rho])}$, natomiast G można rozumieć jako pseudometrykę. Wyrażenie $\|\rho\|_G$ jest jedynie półnormą, ponieważ nie spełnia ona warunku *separowania punktów*, tzn. $\|\alpha\|_G = 0 \not\Rightarrow \alpha = 0$. Wszystkie te cechy sprawiają, że warunek (3) ma interpretację geometryczną: aby wykluczyć, że wektor \vec{a} jest elementem zbioru wypukłego S wystarczy pokazać, że: $\max_{\vec{b} \in S} \vec{a} \cdot \vec{b} < \vec{a} \cdot \vec{a}$. Warunek (3) jest bezpośrednio stosowalny eksperymentalnie dzięki następującemu sformułowaniu. Dowolny stan dwucząstkowy ρ może być przedstawiony za pomocą tensora korelacji T_{ij} :

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{ij} T_{ij} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B, \quad (5)$$

gdzie $\{\sigma_i^A\}$ i $\{\sigma_j^B\}$ to Hermitowskie bazy operatorowe na podukładach. Elementy $T_{ij} = \text{Tr}(\rho \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B)$ tensora korelacji są bezpośrednio mierzalne. Sam warunek (3) może być przedstawiony w postaci zawierającej wyłącznie tensory korelacji, ponieważ dla dowolnego liniowego odwzorowania G operator $G[\rho]$ również jest funkcją elementów tensora korelacji:

$$G[\rho] = \frac{1}{4} \sum_{ijkl} T_{ij} G_{kl}^{ij} \sigma_k^A \otimes \sigma_l^B, \quad (6)$$

gdzie G_{kl}^{ij} jest tensorową postacią G w wybranych bazach lokalnych.

Zdefiniowawszy wszystkie podstawowe pojęcia możemy przejść do przedstawienia relacji pomiędzy kryteriami splątania (1) i (3) opisanej w pracy [H7]. Cała konstrukcja zaczyna się od funkcjonalnego uogólnienia geometrycznego warunku (3) poprzez usunięcie warunku dodatniości (4) odwzorowania G , pozostawiając jednak założenie o zachowywaniu Hermitowskości. Oznaczmy tak uogólnione odwzorowanie poprzez \mathcal{G} . Ponieważ \mathcal{G} zachowuje Hermitowskość, maksymalizacja $\text{Tr}(\rho \mathcal{G}[\sigma_{\text{prod}}])$ po zbiorze stanów produktowych pozostaje dobrze zdefiniowana, dzięki czemu zachodzi analogiczny warunek splątania:

$$\rho \text{ jest splątany} \iff \exists_{\mathcal{G}} \max_{\sigma_{\text{prod}}} \text{Tr}(\rho \mathcal{G}[\sigma_{\text{prod}}]) < \text{Tr}(\rho \mathcal{G}[\rho]). \quad (7)$$

Ten czysto algebraiczny warunek na splątanie, zaproponowany w [H7], pomimo podobieństwa do warunku geometrycznego (3), zapewnia znacznie efektywniejszą detekcję splątania, który to aspekt będzie omówiony pod koniec tego rozdziału. Zauważmy, że w warunku (7) odwzorowanie \mathcal{G} nie musi być liniowe. Jednakże działanie dowolnego odwzorowania nieliniowego może nie mieć reprezentacji za pomocą wielkości lokalnie mierzalnych, jak w przypadku (6). Aby utrzymać przyjazny eksperymentalnie charakter uogólnionego kryterium (7), ograniczamy się do odwzorowań postaci:

$$\mathcal{G}[\rho] = \frac{1}{4} \sum_{kl} \left(\sum_{ij} f(T_{ij}) \mathcal{G}_{kl}^{ij} \right) \sigma_k^A \otimes \sigma_l^B, \quad (8)$$

gdzie $f(x)$ jest dowolną funkcją rzeczywistą.

Aby znaleźć relację pomiędzy uogólnionym kryterium (7) a kryterium opartym o odwzorowania dodatnie (1), w pierwszej kolejności przekształcamy kryterium (7) do postaci analogicznej do tzw. świadków splątania [E31, E68]:

$$\text{Tr}(\rho W_{\mathcal{G}}[\rho]) < 0, \quad (9)$$

gdzie operator świadka jest zdefiniowany jako:

$$W_{\mathcal{G}}[\rho] = \max_{\sigma_{\text{prod}}} \text{Tr}(\rho \mathcal{G}[\sigma_{\text{prod}}]) \mathbb{1} - \mathcal{G}[\rho]. \quad (10)$$

Pokazaliśmy, że dzięki izomorfizmowi Choi-Jamiołkowskiego [E40, E20] operator $W_{\mathcal{G}}[\rho]$ (traktowany nie jako odwzorowanie, a jako przetransformowany stan) może być przedstawiony w formie zawierającej pewne odwzorowanie dodatnie:

$$W_{\mathcal{G}}[\rho] = (\mathbb{1} \otimes \Lambda_{\mathcal{G},\rho} \circ \mathcal{T})[\rho_{\Phi^+}], \quad (11)$$

gdzie \mathcal{T} oznacza transpozycję, ρ_{Φ^+} jest projektorem na nieunormowany stan maksymalnie splątany $|\Phi^+\rangle = \sum_i |ii\rangle$, natomiast odwzorowanie dodatnie $\Lambda_{\mathcal{G},\rho}$ ma jawną postać:

$$\Lambda_{\mathcal{G},\rho}[\lambda] = \sum_{i,j} \frac{1}{4} w_{ij}^{\mathcal{G},\rho} \text{Tr}(\sigma_i^A \lambda) \sigma_j^B. \quad (12)$$

W powyższym wzorze $w_{ij}^{\mathcal{G},\rho}$ jest elementem macierzowym operatora $W_{\mathcal{G}}[\rho]$ w lokalnej bazie: $W_{\mathcal{G}}[\rho] = \frac{1}{4} \sum_{i,j} w_{ij}^{\mathcal{G},\rho} \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B$.

Mając już wszystkie składniki możemy zaprezentować główny wynik pracy [H7]:

Twierdzenie 1 *Jeśli warunek splątania (7) z pewnym zachowującym Hermitowskość odwzorowaniem \mathcal{G} wykrywa dwucząstkowe splątanie w stanie ρ , to wówczas odwzorowanie dodatnie $\mathcal{T} \circ \Lambda_{\mathcal{G},\rho}^{\text{d}}$ również wykrywa splątanie w stanie ρ poprzez warunek:*

$$(\mathbb{1} \otimes \mathcal{T} \circ \Lambda_{\mathcal{G},\rho}^{\text{d}})[\rho] \not\geq 0, \quad (13)$$

gdzie odwzorowanie $\Lambda_{\mathcal{G},\rho}^{\text{d}}$ jest dualne do (12) i ma następującą jawną postać:

$$\Lambda_{\mathcal{G},\rho}^{\text{d}}[\lambda] = \sum_{i,j} \frac{1}{4} w_{ij}^{\mathcal{G},\rho} \text{Tr}(\sigma_j^B \lambda) \sigma_i^A. \quad (14)$$

Powyższe twierdzenie jest jednostronną relacją pomiędzy uogólnionym warunkiem splątania (7) a warunkiem splątania opartym o odwzorowanie dodatnie (1). Istotnie, dla każdego funkcjonalnego warunku splątania (7) zależnego od pewnego odwzorowania \mathcal{G} istnieje odwzorowanie dodatnie (14), które poprzez warunek (13) wykrywa dwucząstkowe splątanie co najmniej takiego samego zbioru stanów, jak warunek (7). W ogólności warunek oparty o odwzorowanie dodatnie (13) może wykrywać splątanie szerszej klasy stanów. Konieczna jest tu pewna uwaga, mianowicie pomimo, że odwzorowanie (14) jest liniowe, warunek splątania (13) jest nieliniowy, ponieważ odwzorowanie (14) jawnie zależy od stanu, na który działa warunek.

Jak podkreślamy w pracy [H7], konstrukcja odwrotna, czyli znalezienie odwzorowania \mathcal{G} , które poprzez warunek (14) definiowałoby *ustalone* odwzorowanie Λ dla każdego stanu ρ , jest w ogólności analitycznie niewykonalna. Co ciekawe, może być ona jednak łatwo wykonana w przypadku układu dwóch kubitów dla odwzorowania dodatniego w

formie transpozycji (warunek *PPT* (2)). Pokazaliśmy, że warunek *PPT* dla dwóch kubitów może być odtworzony za pomocą odwzorowania \mathcal{G} w formie (8), z tensorem postaci: $\mathcal{G}_{kl}^{ij} = -\delta_{ij}\delta_{jl}\delta_{ik}[\{i, j, k, l\} \neq 0]$, gdzie $[p]$ oznacza wartość logiczną zdania p , oraz z funkcją stałą $f(x) = 1$. Otrzymujemy wówczas odwzorowanie:

$$\mathcal{G}_{\text{PPT}}[\rho] = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \sigma_i \otimes \sigma_i \quad (15)$$

dla każdego dwukubitowego stanu ρ . Wówczas otrzymujemy $\Lambda_{\mathcal{G}_{\text{PPT},\rho}^d}[\lambda] = \lambda$, i ostatecznie warunek (13) przechodzi w warunek *PPT*. Odwzorowanie (15) generuje kryterium funkcjonalne (7), które w zapisie za pomocą tensorów korelacji ma postać:

$$\sum_{i=1}^3 T_{ii} < -1. \quad (16)$$

Powyższy warunek wykrywa splątanie stanu singletowego $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, dla którego lewa strona wynosi -3 , natomiast nie działa ono w przypadku pozostałych trzech stanów Bella. Widzimy więc, że relacja pomiędzy kryterium opartym o odwzorowanie dodatnie, a kryterium funkcjonalnym (będącym uogólnieniem kryterium geometrycznego) jest efektywnie jednostronna. Twierdzenie 1 zapewnia, że kryterium oparte o odwzorowanie dodatnie, które odpowiada ustalonymu kryterium funkcjonalnemu, jest co najmniej tak samo efektywne jak kryterium funkcjonalne. Jednakże przykład z kryterium *PPT* pokazuje, że kryterium funkcjonalne odpowiadające ustalonymu kryterium z odwzorowaniem dodatnim może być znacznie mniej efektywne w wykrywaniu splątania.

Jako ostatni punkt warto wspomnieć, że kryterium funkcjonalne (7) jest znacznie bardziej efektywne w detekcji splątania niż oryginalne kryterium geometryczne (3), które dopuszcza jedynie liniowe odwzorowania (metryki) G . W wersji uogólnionej możemy wykorzystywać nieliniowe odwzorowania w postaci (8). Jak pokazujemy w [H7], wybór (8) z $\mathcal{G}_{kl}^{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}[i, k \neq 0]$ i $f(x) = \text{sgn}(x)$ prowadzi do jawnie nieliniowego odwzorowania \mathcal{G} , które za pomocą warunku (7) perfekcyjnie wykrywa splątanie wszystkich stanów z dwóch rodzin stanów dwukubitowych. Pierwsza z tych rodzin to diagonalne stany Bella:

$$\rho_{BD} = a |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+| + b |\Phi^-\rangle \langle \Phi^-| + \frac{(1-a-b)}{4} \mathbb{1}, \quad (17)$$

gdzie $|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$, druga to tzw. stany Weyla [E32], zdefiniowane jednoznacznie przez warunek, że jedyne nieznikające elementy ich tensora korelacji to $T_{11} = p, T_{22} = q, T_{33} = r$.

5.4.2 Detekcja splątania w dwukomponentowych układach bozonowych za pomocą kryterium geometrycznego

Oryginalne geometryczne kryterium splątania (3) może być przedstawione w formie zawierającej wyłącznie tensory korelacji (5):

$$\rho \text{ jest splątany} \iff \exists_G \max_{T_{\text{prod}}} (T, T_{\text{prod}})_G < (T, T)_G, \quad (18)$$

gdzie iloczyn skalarny jest zdefiniowany jako $(X, Y)_G = \sum_{ijkl} X_{ij} G_{kl}^{ij} Y^{kl}$. Warunek ten może być uproszczony poprzez wybór metryki G_S , która usuwa wszystkie lokalne elementy tensorów korelacji (elementy z jednym indeksem równym zero). Wówczas lewa strona warunku

jest równa największemu współczynnikowi Schmidta tensora korelacji (czyli największej wartości singularnej tensora T traktowanego jako macierz): $\max_{T_{\text{prod}}}(T, T_{\text{prod}})_{G_S} = T_{\text{max}}$. Oznaczmy prawą stronę jako $\mathcal{T} = (T, T)_{G_S}$. Wówczas z warunku (18) wynika prostszy warunek:

$$\epsilon = \frac{\mathcal{T}}{T_{\text{max}}} > 1 \implies \rho \text{ is entangled.} \quad (19)$$

Zauważmy, że poprzez konkretny wybór metryki G_S otrzymaliśmy warunek wystarczający, ale już nie konieczny. Powyższy warunek obowiązuje dla dwóch dowolnych układów d -poziomowych. Kwestią, na której skupia się praca [H5], jest pytanie, czy warunek ten może być zastosowany do detekcji splątania cząstek nierozróżnialnych. Pokazaliśmy, że może on być zaadaptowany do dwukomponentowego układu, w którym każdy komponent zawiera N dwumodowych identycznych bozonów, w celu wykrywania splątania pomiędzy tymi dwoma komponentami, traktowanymi jako rozróżnialne podukłady. Ogólny stan takiego układu można przedstawić w postaci:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k,l=0}^N c_{kl} |N-k\rangle_A^{a_1} |k\rangle_A^{a_2} \otimes |N-l\rangle_B^{b_1} |l\rangle_B^{b_2}. \quad (20)$$

W powyższym wzorze c_{kl} oznacza dowolne amplitudy odpowiednich stanów zapisanych w reprezentacji Focka, w której A i B to dwa mody przestrzenne, które odpowiadają dwóm komponentom, natomiast a_1, a_2 i b_1, b_2 to dwa dodatkowe mody bozonowe w ramach każdego z komponentów. Zauważmy, że w ramach każdego z komponentów występujące w nim bozony są nierozróżnialne, jednak komponenty są między sobą rozróżnialne poprzez przestrzenne mody A i B . Warto dodać, że powyższy stan opisuje wiele eksperymentalnie osiągalnych układów, a wybrane z nich będą omówione nieco później. Kluczowym pomysłem w pracy [H5] jest zdefiniowanie efektywnej $(N+1)$ -elementowej bazy dla obu komponentów A i B w formie:

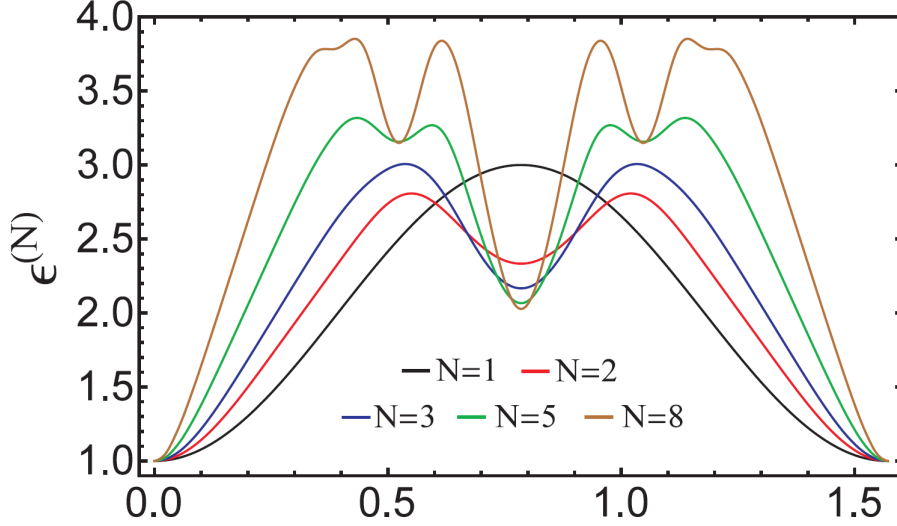
$$|k\rangle_X = |N-k\rangle_X^{x_1} |k\rangle_X^{x_2}, \quad X = A, B, \quad x = a, b. \quad (21)$$

Nowo zdefiniowane wektory $\{|k\rangle_X\}_{k=0}^N$ mogą być rozumiane jako wektory własne diagonalnej macierzy z Hermitowskiej bazy układu $(N+1)$ -poziomowego, np. bazy macierzy Gell-Manna. Jest to konwencja analogiczna do definiowania bazy standardowej dla kubitu jako rozpiętej przez wektory własne operatora σ_z (diagonalnej macierzy Pauliego). Dzięki temu stan dwukomponentowego układu dwumodowych bozonów (20) jest przetransformowany w stan dwóch układów $(N+1)$ -poziomowych:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k,l=0}^N c_{kl} |k\rangle_A \otimes |l\rangle_B, \quad (22)$$

co pozwala na bezpośrednie zastosowanie geometrycznego kryterium splątania (19). Sprawdziliśmy efektywność tego warunku dla trzech fizycznych realizacji stanu (20), dwóch dla kondensatów Bosego-Einsteina (*BEC – Bose-Einstein Condensates*) i jednego dla stanu optycznego będącego wynikiem parametrycznej konwersji wewnętrznej. Poniżej zaprezentujemy dwa z nich.

Pierwszy przykład to dwukomponentowy kondensat Bosego-Einsteina, splątany za pomocą oddziaływania spinowego typu $S^z S^z$, który znany jest z egzotycznych własności splątania, wykazującego własności fraktalne [E14, E43]. Takie oddziaływanie może być zaim-



Rysunek 1: Wartość indykatora splątania $\epsilon^{(N)}$ (19) jako funkcja czasu oddziaływania dla dwukomponentowego kondensatu Bosego-Einsteina (24), który podlega oddziaływaniu splątującemu typu $S^z S^z$. Indykator ten jest wyliczony dla kilku wartości całkowitej liczby fotonów N w komponencie. Widać wyraźnie, że indykator $\epsilon^{(N)}$ przekracza wartość 1 dla każdej wartości N oraz dla każdej chwili czasu, co potwierdza obecność splątania pomiędzy dwoma komponentami w stanie (24).

plementowane eksperymentalnie na kilka sposobów [E35, E69, E56, E1]. Każdy z komponentów kondensatu opisywany jest za pomocą spinowego stanu koherentnego:

$$|\alpha, \beta\rangle_X = \sum_{k=0}^N \sqrt{\binom{N}{k}} \alpha^{N-k} \beta^k |N-k\rangle_X^{x_1} |k\rangle_X^{x_2}, \quad (23)$$

gdzie dwa mody lokalne są oznaczone przez x_1 i x_2 a X oznacza numer komponentu. Weźmy reprezentację Schwingera operatora spinu S^z na X -owym komponencie $S_X^z = x_1^\dagger x_1 - x_2^\dagger x_2$. Wówczas wychodząc ze stanu początkowego kondensatu z $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ możemy za pomocą oddziaływania typu $S^z S^z$ uzyskać stan splątany [E14]:

$$|\psi_{BEC}\rangle = e^{-iS_A^z S_B^z t} \left| \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle_A \left| \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle_B = \sum_{k,l=0}^N b_{kl}(t) |N-k\rangle_A^{a_1} |k\rangle_A^{a_2} \otimes |N-k\rangle_B^{b_1} |k\rangle_B^{b_2}, \quad (24)$$

gdzie zależne od czasu współczynniki mają postać: $b_{kl}(t) = \frac{1}{2^N} \sqrt{\binom{N}{k} \binom{N}{l}} e^{-i(N-2k)(N-2l)t}$. Ponieważ oddziaływanie jest okresowe, ograniczamy się do przedziału $t \in [0, \frac{\pi}{2})$. W pracy [H5] wyliczyliśmy numerycznie wartość indykatora splątania ϵ w (19) dla stanu (24) jako funkcję czasu oddziaływania, dla $N = 1, \dots, 8$ (zobacz Rys. 1). Widać, że warunek splątania (19) wykrywa splątanie pomiędzy komponentami tego stanu dla każdej wartości czasu oddziaływania, a jego efektywność rośnie wraz z N .

Drugi przykład to stan ściśnięty próżni, będący rezultatem zjawiska spontanicznej parametrycznej konwersji wewnętrznej [E62]:

$$|\psi_{SPDC}\rangle = \frac{1}{\cosh^2 K} \sum_{N=0}^{\infty} \tanh^N K \sqrt{N+1} |\psi^N\rangle, \quad (25)$$

gdzie N -fotonowy składnik ma postać:

$$|\psi^N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{m=0}^N |N-m\rangle_A^H |m\rangle_A^V |N-m\rangle_B^H |m\rangle_B^V. \quad (26)$$

W powyższych wzorach H i V oznaczają mody polaryzacyjne, natomiast A, B oznaczają mody przestrzenne. Warunek splątania (19) może być zastosowany do projekcji stanu (25) na podprzestrzeń o stałej liczbie fotonów, czyli właśnie stanu (26), dla którego warunek (19) daje $\epsilon^{(N)} = N + 2$. Potwierdza to splątanie pomiędzy komponentami w modach przestrzennych A i B dla dowolnego N .

5.5 Nowe aspekty nieklasyczności Bella w odniesieniu do niskowymiarowych układów kwantowych

5.5.1 Maksymalna nieklasyczność Bella a maksymalne splątanie dla układów trójpoziomowych

Optymalną nierównością Bella, której łamanie wykazuje nieklasyczność stanów dwóch kutritów, jest nierówność CGLMP (Collins, Gisin, Linden, Massar, Popescu) [E24, E48]. Nierówność ta stosuje się do eksperymentu Bellowskiego z dwoma obserwatorami, dwoma lokalnymi ustawieniami pomiarowymi oraz trzema lokalnymi wynikami pomiarów. Oznaczmy wyniki dwóch obserwatorów jako odpowiednio $\{A_i\}_{i=1,2}$ i $\{B_i\}_{i=1,2}$, gdzie i oznacza numer ustawienia. Każdy z wyników może przyjmować wartości ze zbioru $\{0, 1, 2\}$. Wówczas wyrażenie CGLMP ma postać:

$$\begin{aligned} I_3 = & P(A_1 = B_1) + P(A_2 + 1 = B_1) + P(A_2 = B_2) + P(A_1 = B_2) \\ & - P(A_1 = B_1 - 1) - P(A_2 = B_2) - P(A_2 = B_2 - 1) - P(A_1 - 1 = B_2), \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie $P(\cdot)$ oznacza prawdopodobieństwo określonych zdarzeń. Nierówność CGLMP ma postać:

$$-4 \leq I_3 \leq 2. \quad (28)$$

Oznaczmy standardową bazę kutritową jako $\{|i\rangle\}_{i=0}^2$. Wówczas nierówność CGLMP jest maksymalnie łamana przez stan [E3]:

$$|\psi_{\text{opt}}\rangle = a |00\rangle + b |11\rangle + a |22\rangle, \quad (29)$$

gdzie $a \approx 0.617$ i $b \approx 0.489$, dla którego wyrażenie CGLMP osiąga wartość $I_3(|\psi_{\text{opt}}\rangle) = 2.915$. Tymczasem maksymalnie splątany stan dwóch kutritów $|\psi_{\text{ME}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=0}^2 |ii\rangle$ daje nieco mniejsze łamanie nierówności CGLMP: $I_3(|\psi_{\text{ME}}\rangle) = 2.873$. Porównanie nieklasycznych własności tych dwóch stanów prowadzi do wniosku, że występuje tu niespójność pomiędzy maksymalnym splątaniem a maksymalną nieklasycznością Bella. Ta niespójność ujawnia się również w przypadku dwóch układów wyżej wymiarowych [E3], jak również w przypadku trzech kutritów [E2]. Proponowano geometryczne wyjaśnienia tej niespójności [E27, E64], problem pozostawał jednak cały czas niejasny.

Aby zapewnić głębsze zrozumienie niekonsystencji pomiędzy maksymalnym splątaniem a nieklasycznością Bella, w pracy [H8] przeprowadziliśmy analizę *operatora Bella* dla nierówności CGLMP. Operator Bella to obserwabla, której wartość średnia reprodukuje wartość wyrażenia Bella odpowiadającego pewnej nierówności Bella dla dowolnego stanu przy ustalonych ustawieniach pomiarowych. Zatem wyrażenie CGLMP ma przedstawienie:

$$I_3(\rho) = \text{Tr}(\hat{B}(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_2)\rho), \quad (30)$$

gdzie ρ oznacza dowolny stan dwóch kutritów a $\hat{B}(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_2)$ jest operatorem Bella odpowiadającym wyborowi lokalnych ustawień w postaci $\{\hat{A}_i\}$ oraz $\{\hat{B}_j\}$. Największa wartość własna operatora Bella dla optymalnych ustawień pomiarowych jest jednocześnie największą wartością wyrażenia Bellowskiego, a zatem w przypadku łamania nierówności Bella odpowiada ona jednocześnie maksymalnemu łamaniu.

Istota analizy przeprowadzonej w pracy [H8] polega na przedstawieniu dwu-kutritowego operatora Bella dla nierówności CGLMP jako operatora cztero-kubitowego, zbudowanego z symetrycznych operatorów dwu-kubitowych. Aby wyjaśnić tę reprezentację, przedstawię problem w większej ogólności.

Dowolny operator działający na przestrzeni stanów n kutritów (czyli na $(\mathbb{C}^3)^{\otimes n}$) może być wyrażony za pomocą lokalnych baz Hermitowskich [E8]:

$$\hat{B} = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^9 B_{i_1, \dots, i_n} \gamma_{i_1} \otimes \dots \otimes \gamma_{i_n}, \quad (31)$$

gdzie baza $\{\gamma_i\}$ składa się z macierzy Gell-Manna oraz macierzy jednostkowej. Jednakże istnieje inna baza Hermitowska dla operatorów działających na \mathbb{C}^3 , mianowicie baza zbudowana z operatorów spinu-1: $\tilde{S}_x, \tilde{S}_y, \tilde{S}_z$ (tylko oznacza operatory na przestrzeni \mathbb{C}^3). Relacja pomiędzy tymi bazami jest następująca [O10]:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \tilde{S}_x, \gamma_2 = \tilde{S}_y, \gamma_3 = \tilde{S}_z, \\ \gamma_4 &= \mathbb{1}_3 - (\tilde{S}_x)^2, \gamma_5 = \mathbb{1}_3 - (\tilde{S}_y)^2, \gamma_6 = \mathbb{1}_3 - (\tilde{S}_z)^2, \\ \gamma_7 &= \tilde{A}_x, \gamma_8 = \tilde{A}_y, \gamma_9 = \tilde{A}_z, \end{aligned} \quad (32)$$

gdzie $\tilde{A}_i = \{\tilde{S}_j, \tilde{S}_k\}$, dla $i, j, k = x, y, z$ i permutacji cyklicznych, jest antykomutatorem operatorów spinu a $\mathbb{1}_3$ jest operatorem jednostkowym na \mathbb{C}^3 . Ponadto operatory spinu-1 mogą być przedstawione w innej reprezentacji, za pomocą symetrycznych operatorów dwu-kubitowych. Wynika to ze znanego faktu z teorii reprezentacji, że przestrzeń stanów dwóch cząstek o spinie połówkowym rozkłada się na podprzestrzeń trypletową (o spinie 1) i singletonową (o spinie 0). Związek pomiędzy operatorami spinu-1 w reprezentacji fundamentalnej (na \mathbb{C}^3) i w reprezentacji dwu-kubitowej (na $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$) jest następujący:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_x &\mapsto \frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 \otimes \sigma_x + \sigma_x \otimes \mathbb{1}_2) = \delta_1, \\ \tilde{S}_y &\mapsto \frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 \otimes \sigma_y + \sigma_y \otimes \mathbb{1}_2) = \delta_2, \\ \tilde{S}_z &\mapsto \frac{1}{2}(\mathbb{1}_2 \otimes \sigma_z + \sigma_z \otimes \mathbb{1}_2) = \delta_3, \end{aligned} \quad (33)$$

gdzie $\{\sigma_i\}$ dla $i = x, y, z$ to macierze Pauliego, a $\mathbb{1}_2$ to macierz jednostkowa na \mathbb{C}^2 . Korzystając ze wzorów (32) oraz powyższej odpowiedniości (33) otrzymujemy pełne odwzorowanie z bazy $\{\gamma_i\}$ do bazy $\{\delta_i\}$ (której trzy pierwsze elementy są już podane we wzorach (33)). Ostatecznie dowolny operator n -kutritowy (31) może być przedstawiony jako operator $2n$ -kubitowy:

$$\hat{B} = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^9 B_{i_1, \dots, i_n} \delta_{i_1} \otimes \dots \otimes \delta_{i_n}. \quad (34)$$

Można również łatwo otrzymać relację pomiędzy stanami kutritowymi a symetrycznymi stanami dwu-kubitowymi w oparciu o tzw. rozkład Clebscha-Gordana, w którym baza

sprzężona odpowiada stanom kutritowym:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\mapsto |++\rangle, \\ |1\rangle &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), \\ |2\rangle &\mapsto |--\rangle, \end{aligned} \quad (35)$$

gdzie $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ to standardowa baza kubitowa (oznaczona odmiennie dla odróżnienia od bazy kutritowej).

Korzystając z powyższej relacji pomiędzy operatorami kutritowymi a symetrycznymi operatorami dwu-kubitowymi można wyrazić operator Bella dla nierówności CGLMP jako operator cztero-kubitowy:

$$\hat{B}_{\text{CGLMP}} = \frac{1}{4} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} (\hat{B}_{\text{CHSH}_{13}} + \hat{B}_{\text{CHSH}_{14}} + \hat{B}_{\text{CHSH}_{23}} + \hat{B}_{\text{CHSH}_{24}}) + \hat{B}_{\text{Mermin}} \right). \quad (36)$$

Składa się on z czterech operatorów Bella dla nierówności CHSH dla następujących par kubitów: $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ oraz z operatora Bella dla nierówności Mermina [E50]. Operator Bella dla nierówności CHSH dla kubitów pierwszego i trzeciego ma postać:

$$\hat{B}_{\text{CHSH}_{13}} = \sigma_x \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \sigma_x \otimes \mathbb{1}_2 - \sigma_y \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \sigma_y \otimes \mathbb{1}_2$$

i analogicznie dla pozostałych par, natomiast operator Bella nierówności Mermina ma postać:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{\text{Mermin}} &= \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y - \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \\ &- \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y - \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x - \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y \\ &- \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y - \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x. \end{aligned} \quad (37)$$

Otrzymaliśmy zatem rozkład operatora CGLMP na operatory Bella znanych innych nierówności Bella, co schematycznie przedstawia Rys. 2. Jak już wspomniałem, największa wartość wyrażenia Bella (która odpowiada maksymalnemu łamaniu odpowiadającej mu nierówności Bella) jest równa największej wartości własnej operatora Bella, natomiast optymalny stan jest odpowiadającym jej wektorem własnym.

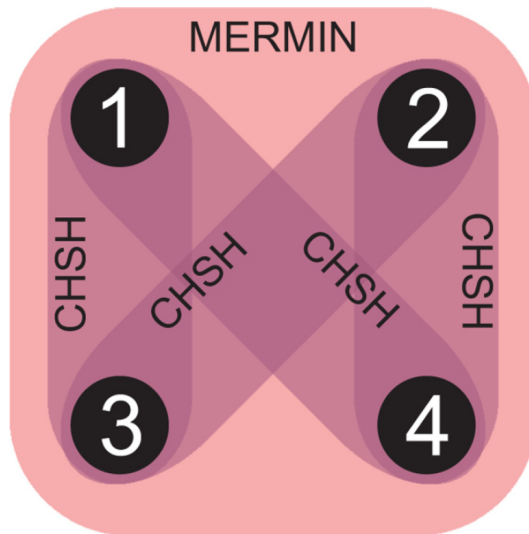
Głównym wynikiem pracy [H8] jest analiza optymalnego stanu dla maksymalnego łamania nierówności CGLMP z punktu widzenia operatora Bella w formie (36). Mianowicie największa wartość własna dla członów typu CHSH tego operatora odpowiada wektorowi własnemu w postaci superpozycji dwóch stanów Bella i cztero-kubitowego stanu GHZ :

$$|\psi\rangle_{4\text{CHSH}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{GHZ}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi^+\rangle |\psi^+\rangle, \quad (38)$$

gdzie $|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+++ \rangle + |-- -- \rangle)$, a $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+- \rangle + |-+ \rangle)$. Równocześnie największa wartość własna operatora Bella nierówności Mermina (37) odpowiada stanowi własnemu w postaci cztero-kubitowego stanu GHZ . Stąd wektor własny całego operatora Bella nierówności CGLMP odpowiadający największej wartości własnej powinien mieć postać:

$$|\psi(p)\rangle_{\text{CGLMP}} = \sqrt{p} |\text{GHZ}\rangle + \sqrt{1-p} |\psi^+\rangle |\psi^+\rangle. \quad (39)$$

Istotnie, okazuje się, że największa wartość własna odpowiada $p_{\text{opt}} \approx 0.761$. Odpowiadający jej optymalny stan $|\psi(p_{\text{opt}})\rangle_{\text{CGLMP}}$, przetransformowany do wersji dwu-kutritowej za



Rysunek 2: Schematyczne przedstawienie operatora Bella nierówności CGLMP jako operatora działającego na przestrzeni czterech kubitów (36). Operator ten składa się z pięciu części, jedna odpowiada cztero-kubitowej nierówności Mermina, natomiast cztery pozostałe odpowiadają dwu-kubitowym nierównościom CHSH na różnych parach kubitów.

pomocą relacji (35) ma oczekiwaną postać (29), czyli jest to dokładnie ten sam stan, który prowadzi do maksymalnego łamania nierówności CGLMP. Tymczasem maksymalnie splątany stan dwóch kubitów odpowiada, przy zastosowaniu relacji (35), cztero-kubitowemu stanowi w formie $|\psi(\frac{2}{3})\rangle_{\text{CGLMP}}$, który nie jest optymalnym stanem własnym operatora Bella (36).

Powyższa analiza pokazuje, że na problem nieklasyczności Bella układu dwóch kubitów można patrzeć poprzez pryzmat korelacji cztero-kubitowych. Wówczas optymalna nieklasyczność Bella wykrywana za pomocą nierówności CGLMP jest wynikiem kompromisu pomiędzy nieklasycznymi korelacjami typu CHSH i korelacjami typu GHZ, a optymalna relacja pomiędzy tymi dwoma składnikami występuje dla cztero-kubitowego stanu kwantowego, którego dwu-kubitowy odpowiednik nie jest stanem maksymalnie splątany.

5.5.2 Algorytmiczny opis nieklasyczności Bella

Standardowy opis nieklasyczności Bella oparty jest na rozumowaniu czysto probabilistycznym [E12]. Wyprowadzając nierówności Bella zakłada się, że wszystkie obserwable mogą być reprezentowane jako zmienne losowe na wspólnej przestrzeni zdarzeń. Dodatkowo wprowadza się pewne więzy na funkcyjne zależności pomiędzy tymi zmiennymi losowymi. Jednym z tych ograniczeń jest założenie, że zmienne te zależą tylko od lokalnych ustawień pomiarowych oraz zmiennej ukrytej (założenie lokalności). Drugim jest założenie, że rozkład prawdopodobieństwa ustawień nie zależy od zmiennej ukrytej, co oznacza, że proces stochastyczny, który odpowiedzialny jest za wybór lokalnych ustawień jest wolny od wszelkich wpływów ze wspólnej przeszłości eksperymentu (założenie *wolnego wyboru*, czasami nazywane założeniem *wolnej woli*). Nierówność Bella może być zawsze wyrażona jako funkcja prawdopodobieństw warunkowych wyników pomiarów (realizacji zmiennych losowych opisujących obserwable) warunkowanych ustawieniami pomiarowymi. W pracy [H9] stawiamy pytanie, czy można wyrazić nieklasyczność Bella w oderwaniu od języka

probabilistycznego.

Historycznie pierwszą próbą wyjścia poza ściśle probabilistyczny opis nieklasyczności Bella były nierówności Bella oparte na entropii warunkowej [E11], uogólnione następnie do nierówności Bella opartych na informacji wzajemnej [E18]. Jednakże każda wielkość teoriiinformacyjna oparta na entropii Shannona (jak entropia warunkowa czy informacja wzajemna) jest funkcją rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych, zatem podejście do nieklasyczności Bella w oparciu o różne rodzaje entropii jest wciąż ufundowane na podstawie probabilistycznej.

W pracy [H9] zaproponowaliśmy całkowicie nowe podejście do nieklasyczności Bella, wolne od pojęć probabilistycznych. Weźmy najprostszy scenariusz Bella z dwoma obserwatorami, dwoma lokalnymi ustawieniami pomiarowymi 0 i 1, oraz dwoma binarnymi (0 lub 1) wynikami pomiarów, oznaczanymi jako x i y , odpowiednio dla obserwatora pierwszego i drugiego. Niech ilość powtórzeń pojedynczego eksperymentu wynosi N . Wówczas możemy pogrupować wyniki pomiarów całego doświadczenia, zawierającego N realizacji pojedynczych pomiarów, na cztery pary ciągów bitowych, odpowiadających koincydencyjnym wynikom dla konkretnych par ustawień $\{x_0, y_0\}$, $\{x_0, y_1\}$, $\{x_1, y_0\}$, $\{x_1, y_1\}$ (dolne indeksy oznaczają ustawienia). W naszym nowym podejściu to właśnie zbiorcze wyniki $\{x_i, y_j\}$ będą traktowane jako elementarne wyniki testu Bellowskiego, którego dokładny opis podam niżej. Takie podejście różni się znacznie od podejścia standardowego, w którym pojedynczy wynik odpowiada pojedynczemu pomiarowi.

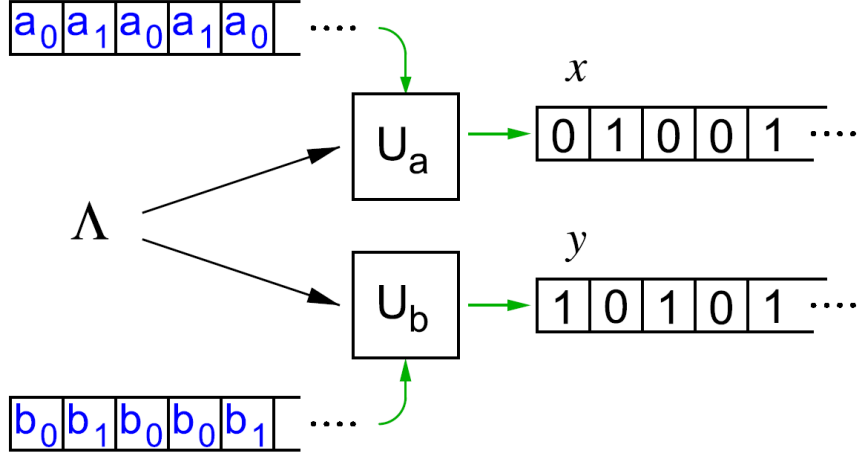
W celu wykazania nieklasycznego charakteru tak zdefiniowanych wyników eksperymentu Bellowskiego stosujemy podejście do nierówności Bella oparte o dystanse [E60, E45, E70], w którym nierówność jest wyprowadzana z nierówności trójkąta dla miary odległości pomiędzy wynikami pomiarów. Ponieważ chcemy przeprowadzić analizę wolną od pojęcia prawdopodobieństwa, korzystamy z dystansu zdefiniowanego za pomocą złożoności Kołmogorowa. Złożoność Kołmogorowa $K(x)$ ciągu bitowego x to czysto algorytmiczna miara losowości tego ciągu, zdefiniowana jako długość najkrótszego programu (zakodowanego w oparciu o wybrany uniwersalny model obliczeń), który jest w stanie zreprodukować ten ciąg. Ciąg jest określany jako algorytmicznie losowy, jeśli jego złożoność Kołmogorowa jest co najmniej tak duża jak długość tego ciągu, co oznacza, że nie może on być skompresowany. Co prawda złożoność Kołmogorowa jest funkcją nieobliczalną, ale może być ona dobrze ograniczona z góry przez długość ciągu skompresowanego za pomocą pewnego algorytmu kompresującego, co wykorzystujemy w naszych rozważaniach.

Wprowadźmy pojęcie Unormowanego Dystansu Informacyjnego (NID - Normalised Information Distance) [E46] pomiędzy dwoma ciągami bitów x i y o długości n :

$$\text{NID}(x, y) = \frac{K(x, y) - \min(K(x), K(y))}{\max(K(x), K(y))}, \quad (40)$$

gdzie $K(x, y)$ jest złożonością Kołmogorowa konkatenowanych ciągów x i y , podczas gdy $K(x), K(y)$ to odpowiednie złożoności Kołmogorowa poszczególnych ciągów. Dystans ten spełnia własności metryki z dokładnością do poprawek rzędu $(\log n)/n$. Wynosi on *zero* dla ciągów identycznych, oraz *jeden* dla ciągów całkowicie niezależnych.

Aby skonstruować test nieklasyczności musimy najpierw zdefiniować pewien klasyczny model referencyjny, który symuluje wyniki pomiarów kwantowych, i który może być eksperymentalnie sfalsyfikowany. W tym celu rozważmy dwie rozseparowane przestrzenie uniwersalne maszyny Turinga (zobacz Rys. 3), z których każda ma dostęp do lokalnego ciągu opisującego ustawienia pomiarowe oraz do wspólnego programu Λ , reprezentującego opis układu fizycznego, który ma być symulowany (analog lokalnej zmiennej ukrytej w standardowym scenariuszu Bellowskim). Każda lokalna maszyna Turinga produkuje



Rysunek 3: Lokalnie realistyczny model obliczeniowy, którego celem jest odtworzenie skorelowanych ciągów bitowych powstających w wyniku pomiarów kwantowomechanicznych. Dwie lokalne maszyny Turinga U_a i U_b otrzymują na wejściu lokalne ciągi bitowe $\{a_i\}$ oraz $\{b_i\}$ opisujące ustawienia pomiarowe w symulowanym eksperymencie oraz wspólny program Λ , odpowiednik współdzielonej lokalnej zmiennej ukrytej w modelach probabilistycznych. Maszyny produkują lokalne ciągi wyjściowe x i y , których korelacje mają za zadanie odtwarzać korelacje obserwowane w eksperymencie.

ciąg wyników, który ma symulować wyniki pomiarów na układach kwantowych. Na końcu przygotowujemy cztery pary ciągów bitowych biorąc podciągi ciągów wyjściowych, które odpowiadają koincydencyjnym wejściom (symulującym ustawienia pomiarowe). Wreszcie wyprowadzamy ograniczenie na stopień skorelowania tak otrzymanych ciągów wyjściowych oraz sprawdzamy, czy wyniki pomiarów kwantowoptycznych mogą łamać te ograniczenie. Punktem wyjścia do sformułowania klasycznego ograniczenia siły korelacji jest fakt, że NID spełnia nierówność trójkąta, stąd:

$$\begin{aligned} \text{NID}(x_0, y_0) + \text{NID}(y_0, y_1) &\geq \text{NID}(x_0, y_1), \\ \text{NID}(x_1, y_0) + \text{NID}(x_1, y_1) &\geq \text{NID}(y_0, y_1). \end{aligned} \quad (41)$$

Zauważmy, że para ciągów $\{y_0, y_1\}$ nie może być w ogólności otrzymana eksperymentalnie, gdyż może odpowiadać koincydencyjnym wynikom dla niekompatybilnych obserwabli. Jednakże przyjmujemy pewną wersję założenia *realizmu*, która zakłada, że wyniki nieprzeprowadzonych pomiarów są dobrze zdefiniowane, stąd można w sensowny sposób przypisać złożoność Kolmogorowa do ciągu bitowego odpowiadającego wynikom nieprzeprowadzonych pomiarów. To założenie odpowiada w zasadzie tzw. *kontrfaktycznej określoności* wyników pomiarów. Istotnie, załóżmy, że ciąg y_0 został zmierzony. Wówczas ciąg y_1 nie mógł być zmierzony podczas tych samych realizacji eksperymentu, jednakże nasze założenie zapewnia, że jest on dobrze określony. Łącząc obie nierówności trójkąta (41) otrzymujemy następującą nierówność:

$$S' = \text{NID}(x_0, y_1) - \text{NID}(x_0, y_0) - \text{NID}(x_1, y_0) - \text{NID}(x_1, y_1) \leq 0. \quad (42)$$

Zauważmy, że każdy z ciągów w powyższej nierówności występuje dwa razy, i każde z tych wystąpień odpowiada różnym realizacjom eksperymentalnym. Postulujemy zatem jeszcze jedno założenie *jednorodnej złożoności*, które oznacza, że złożoność danego ciągu wynikowego odpowiadającego ustalonemu ustawieniu jest stała dla różnych realizacji (gdzie przez

realizację eksperymentu rozumiemy cały ciąg N pojedynczych pomiarów). Pozostaje jeszcze problem nieobliczalności złożoności Kołmogorowa. Aby warunek (42) był testowalny eksperymentalnie, zamieniamy Unormowany Dystans Informacyjny na Unormowany Dystans Kompresyjny (NCD - Normalised Compression Distance). W tym celu ustalmy wybór algorytmu kompresji i zdefiniujmy [E21]:

$$\text{NCD}(x, y) = \frac{C(x, y) - \min(C(x), C(y))}{\max(C(x), C(y))}, \quad (43)$$

gdzie $C(x)$ jest długością skompresowanego ciągu x a $C(x, y)$ jest długością skompresowanego konkatenowanego ciągu x i y . W ten sposób otrzymujemy następującą algorytmiczną nierówność Bella:

$$S = \text{NCD}(x_0, y_1) - \text{NCD}(x_0, y_0) - \text{NCD}(x_1, y_0) - \text{NCD}(x_1, y_1) \leq 0. \quad (44)$$

Aby zweryfikować łamanie powyższej nierówności (44) przeprowadziliśmy eksperyment Bellowski na spleątanych polaryzacyjnie parach fotonów:

$$|\psi_{\text{exp}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle - |V\rangle|H\rangle) \quad (45)$$

Pojedynczy eksperyment wyprodukował ciągi wyjściowe o średniej długości rzędu 10^5 . Nierówność (44) została zweryfikowana wykorzystując algorytm kompresji LZMA (Lempel, Ziv, Markov) do oszacowania dystansu kompresyjnego (43). Chociaż sama nierówność jest czysto algorytmiczna, w celu oszacowania niepewności estymacji S , cała procedura pomiarowa została powtórzona osiem razy, dając ostatecznie $S = 0.0494 \pm 0.0076$. Rezultat ten pokazuje jednoznacznie, że wyniki pomiarów na układach kwantowych znacząco łamią algorytmiczną nierówność Bella (44), a zatem, że przewidywania kwantomechaniczne nie mogą być zasymulowane przez klasyczny model obliczeniowy spełniający łącznie założenia: realizmu (kontrafaktycznej określoności wyników), lokalności oraz jednorodnej złożoności.

5.6 Nieklasyczne własności interferencji ze względu na nierozróżnialność cząstek

5.6.1 Uogólniony opis probabilistyczny wielofotonowej interferometrii oraz odtworzenie kwantowego prawdopodobieństwa grupowania się fotonów

Kiedy dwa identyczne fotony wchodzą do symetrycznego dzielnika wiązki różnymi wejściami, zawsze opuszczają dzielnik zgrupowane, jednym bądź drugim wyjściem z równym prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Ta własność idealnego grupowania się fotonów nie przenosi się na przypadek większej liczby modów [E17]. Istotnie, gdy pojedyncze fotony wchodzą wszystkimi różnymi wejściami do optycznego multiportu o liczbie modów większej niż dwa, prawdopodobieństwo całkowicie zgrupowanej konfiguracji wyjściowej jest ściśle mniejsze od jedności. Fakt ten może być łatwo wyprowadzony w oparciu o formalizm optyki liniowej, powstaje jednak pytanie, czy może on być uzasadniony w oparciu o fizyczne zasady sformułowane *niezależnie* od formalizmu mechaniki kwantowej. Aby odpowiedzieć na to pytanie w pracy [H4] wprowadziliśmy uogólniony opis probabilistyczny dla kwantowej optyki liniowej.

Uogólniony opis probabilistyczny [E19, E25, E49] polega na zdefiniowaniu abstrakcyjnych stanów, transformacji oraz pomiarów w języku relacji kwazi-probabilistycznych, przy czym opis ten nie musi spełniać Kołmogorowskich własności modeli statystycznych (np. nie wymaga się istnienia wspólnej przestrzeni zdarzeń). Jednym z celów takiego podejścia

jest zrekonstruowanie kwantowych własności układu fizycznego *spoza mechaniki kwantowej*, poprzez wprowadzenie pewnych założeń teoriiinformacyjnych oraz strukturalnych (np. warunek braku ponadświetlnej komunikacji). W pracy [H4] proponujemy uogólniony model probabilistyczny dla optyki liniowej. Model ten jest parametryzowany dwoma liczbami: liczbą modów K oraz liczbą cząstek N . Ponieważ zakładamy, że cząstki są identyczne, całkowita liczba konfiguracji układu wynosi:

$$d = \frac{(K + N - 1)!}{N!(K - 1)!}. \quad (46)$$

W naszym modelu stany układu są określone jako rozkłady prawdopodobieństwa $\mathbf{\Pi}$ różnych konfiguracji obsadzeń modów przez hipotetyczne cząstki nierozróżnialne. Na przykład dla $N = K = 2$ mamy trzy możliwe konfiguracje: $\{2, 0\}$ (dwie cząstki w pierwszym modzie, zero cząstek w drugim), $\{1, 1\}$, $\{0, 2\}$, stąd ogólny stan jest opisany wektorem prawdopodobieństwa $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{p}_{20}, \mathbf{p}_{11}, \mathbf{p}_{02}]$. Transformacje są reprezentowane jako stochastyczne macierze przejścia \mathbb{S} o wymiarze $d \times d$. Na przykład transformacja odpowiadająca symetrycznemu dzielnikowi światła w działaniu na stan dwucząstkowy ma postać:

$$\mathbb{S}_{BS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Elementy macierzy przejścia \mathbb{S} opisują prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy różnymi konfiguracjami. Mają one ogólną postać $P_x^{(y)}$, gdzie y oznacza konfigurację początkową, podczas gdy x oznacza konfigurację końcową. Na przykład element $[\mathbb{S}_{BS}]_{11}$ macierzy (47) wynosi $[\mathbb{S}_{BS}]_{11} = P_{20}^{(20)} = \frac{1}{4}$.

W proponowanym modelu wprowadzamy dwa strukturalne ograniczenia:

- **bistochastyczność**: macierz przejścia powinna być bistochastyczna, co gwarantuje, że transformacje fizyczne nie zmniejszają entropii rozkładów prawdopodobieństwa,
- **spójność pomiędzy transformacją a redukcją do rozkładu o mniejszej liczbie cząstek**: jeśli najpierw zredukujemy rozkład N -cząstkowy do $M < N$ -cząstkowego, a następnie dokonamy transformacji stanu, otrzymamy to samo, co otrzymalibyśmy transformując najpierw stan N -cząstkowy, a następnie redukując ilość cząstek do $M < N$. Aby opisać tę własność formalnie, wprowadźmy redukującą operację stochastyczną $\mathbb{D}^{(N)}$, która transformuje stan N -cząstkowy do stanu $(N - 1)$ -cząstkowego poprzez losowe usunięcie jednej cząstki. Na przykład dla dwóch cząstek w dwóch modach ($N = K = 2$) macierz redukcji rozkładu dwucząstkowego do jednocząstkowego ma postać:

$$\mathbb{D}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Wówczas dowolna redukcja może być przedstawiona jako złożenie:

$$\mathbb{D}^{(N \rightarrow M)} = \mathbb{D}^{(M+1)} \dots \mathbb{D}^{(N-1)} \mathbb{D}^{(N)}.$$

Warunek spójności można ostatecznie sformułować jako:

$$\forall_{1 \leq M < N} \mathbb{D}^{(N \rightarrow M)} \mathbb{S}^{(N)} \mathbf{\Pi}^{(N)} = \mathbb{S}^{(M)} \mathbb{D}^{(N \rightarrow M)} \mathbf{\Pi}^{(N)}. \quad (49)$$

Zauważmy, że obie powyższe własności są spełnione w liniowych układach kwantowo optycznych. Ewolucja unitarna odpowiada macierzom unistochastycznym, które stanowią podklasę macierzy bistochastycznych. Zauważmy też, że warunek spójności dla $M = 1$ oznacza, że ewolucja stanu o dowolnej liczbie cząstek jest zdeterminowana ewolucją jednocząstkową. Dokładnie tak dzieje się w optyce liniowej: ponieważ fotony nie oddziałują ze sobą, operatory kreacji pojedynczego fotonu transformują się niezależnie od siebie poprzez relację: $a_i^\dagger = \sum_j U_{ij} a_j^\dagger$ [E51].

Powyższa dyskusja pokazuje, że uogólniony model probabilistyczny dla optyki liniowej odzwierciedla istotne cechy kwantowomechanicznej ewolucji nieoddziaływujących identycznych cząstek. Powstaje pytanie, czy model ten jest w stanie odtworzyć kwantowe własności grupowania się fotonów. Zdefiniujmy formalnie prawdopodobieństwo grupowania się cząstek dla przypadku trzech cząstek w trzech modach ($N = K = 3$):

$$B_3 = P_{300}^{(111)} + P_{030}^{(111)} + P_{003}^{(111)}, \quad (50)$$

gdzie $P_{300}^{(111)}$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia z konfiguracji $\{1, 1, 1\}$ do $\{3, 0, 0\}$ i podobnie dla pozostałych. Okazuje się, że hipotetyczne cząstki, których dynamika jest opisana przez zaproponowany model probabilistyczny mają silniejsze własności grupujące od tych dopuszczanych przez mechanikę kwantową. Mianowicie największe możliwe prawdopodobieństwo grupowania się trzech fotonów (50) przewidywane przez mechanikę kwantową wynosi $B_3^{QM} = \frac{2}{3}$ i jest realizowane przez symetryczny triter. W modelu uogólnionym będzie mu odpowiadać macierz unistochastyczna, powstała przez wzięcie kwadratów modułów elementów macierzy unitarnej tritera wyraz po wyrazie. Z drugiej strony uogólniony model probabilistyczny spełniający założenia bistochastyczności oraz spójności ewolucji i redukcji liczby cząstek dopuszcza wyższe prawdopodobieństwo grupowania się cząstek $B_3^{GP} = \frac{3}{4}$. Pytanie, czy da się odtworzyć maksymalne kwantowe prawdopodobieństwo grupowania się fotonów poprzez dodanie w modelu uogólnionym jakiegoś dodatkowego ograniczenia strukturalnego.

Głównym wynikiem pracy [H4] jest podanie takiego dodatkowego warunku dla przypadku trzech modów. Warunek ten to produktowy charakter ewolucji konfiguracji dwucząstkowej, w której obie cząstki są początkowo w tym samym modzie. Istotnie, dzięki bistochastyczności i spójności ewolucji i redukcji cząstek (49) prawdopodobieństwo grupowania się cząstek B_3 (50) jest ograniczone z góry przez sumę dwucząstkowych prawdopodobieństw przejść:

$$B_3 \leq 1 - \frac{1}{3} \left(P_{200}^{(200)} + P_{200}^{(020)} + P_{200}^{(002)} + P_{020}^{(200)} + P_{020}^{(020)} + P_{020}^{(002)} + P_{002}^{(200)} + P_{002}^{(020)} + P_{002}^{(002)} \right). \quad (51)$$

Postulujemy, że wobec braku oddziaływania pomiędzy cząstkami, dwucząstkowe stany produktowe:

$$\mathbf{\Pi}_{200} = [\mathbf{p}_{200} = \mathbf{1}, \mathbf{p}_{020} = \mathbf{0}, \mathbf{p}_{002} = \mathbf{0}, \mathbf{p}_{110} = \mathbf{0}, \mathbf{p}_{101} = \mathbf{0}, \mathbf{p}_{011} = \mathbf{0}],$$

i analogicznie zdefiniowane $\mathbf{\Pi}_{020}, \mathbf{\Pi}_{002}$ powinny transformować się zgodnie z ewolucją produktową:

$$\mathbb{S}^{(2)} \mathbf{\Pi}_{200} = \mathbb{S}^{(1)} \mathbf{\Pi}_{100} \times \mathbb{S}^{(1)} \mathbf{\Pi}_{100}, \quad (52)$$

gdzie $\mathbf{\Pi}_{100} = [\mathbf{p}_{100} = \mathbf{1}, \mathbf{p}_{010} = \mathbf{0}, \mathbf{p}_{001} = \mathbf{0}]$, a iloczyn w powyższym wzorze jest rozumiany jako iloczyn Kroneckera dwóch wektorów prawdopodobieństwa, z dodatkową redukcją wymiarów z dziewięciu do sześciu w związku z nierozróżnialnością cząstek. Wzór (52) implikuje, że dla symetrycznego tritera wszystkie prawdopodobieństwa we wzorze (51) wynoszą $\frac{1}{9}$, stąd otrzymujemy ograniczenie $B_3 \leq \frac{2}{3} = B_3^{QM}$. W ten sposób odtworzyliśmy

maksymalne kwantowe prawdopodobieństwo grupowania się trzech fotonów na wyjściach z optycznego triteru w ramach uogólnionego modelu probabilistycznego dla optyki liniowej. Model ten zawiera trzy istotne założenia: bistożystyczność ewolucji, spójność pomiędzy redukcją liczby cząstek a ewolucją (49) oraz dodatkowo produktowy charakter ewolucji konfiguracji, w których dwie cząstki znajdują się w tym samym modzie (52).

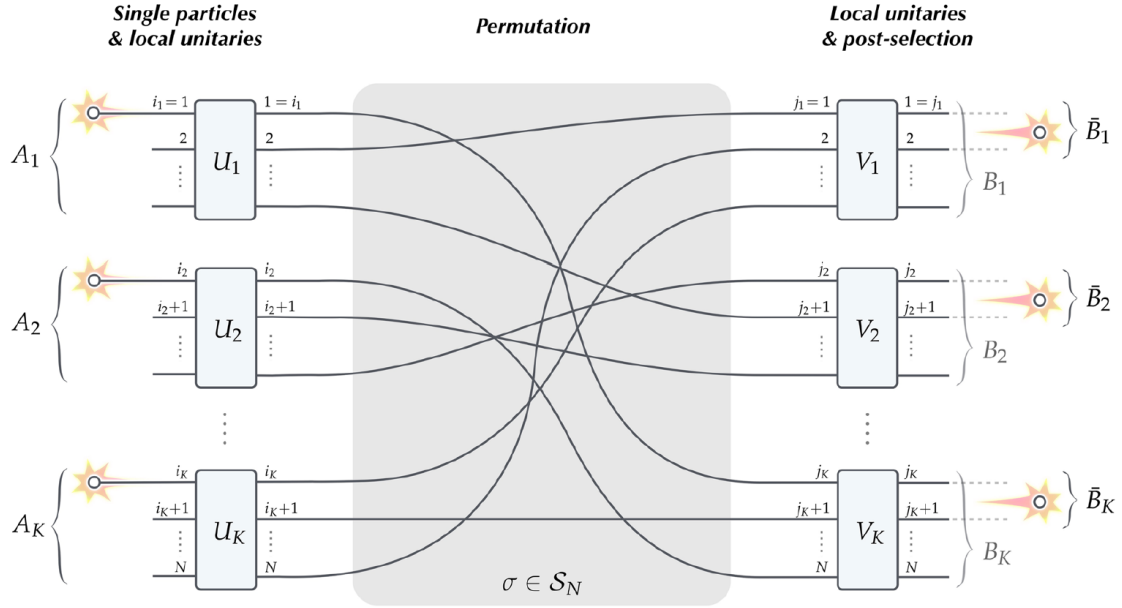
5.6.2 Interferometryczne schematy generowania wielocząstkowych stanów splątanych z *niespotykaniem się* cząstek

Interferencja ze względu na nierozróżnialność fotonów jest najczęściej kojarzona ze zjawiskiem Hong-Ou-Mandla [E30], w którym dwa fotony wchodzące różnymi wejściami do dzielnika światła, wychodzą z niego zawsze zgrupowane (jako para), gdyż amplitudy prawdopodobieństwa odpowiadające koincydencji (wyjściu różnymi ścieżkami) kasują się ze względu na identyczność fotonów. Zjawisko to jest bezpośrednio związane z relacjami komutacyjnymi jakie spełniają fotonowe operatory kreacji. Istotnie, jeśli rozważalibyśmy cząstki fermionowe z antykomutującymi operatorami kreacji, efekt byłby odwrotny — na wyjściach z dzielnika cząstki zawsze występowałyby w koincydencji, realizując zakaz Pauliego. A zatem interferencja typu Hong-Ou-Mandla [E30] silnie zależy od statystycznych własności cząstek. Istnieje jeszcze inny typ interferencji ze względu na nierozróżnialność, który nie zależy od relacji komutacyjnych operatorów kreacji cząstek. Jego przyczyną jest nierozróżnialność par ścieżek dla cząstek, które mogą pochodzić z niezależnych źródeł. Ten typ interferencji został zaproponowany przez Yurke i Stolera w dwóch kluczowych pracach [E73, E72]. Cechą charakterystyczną tego typu eksperymentów jest konieczność stosowania procedury postselekcji zdarzeń na etapie końcowych pomiarów, aby otrzymać nieklasyczne korelacje. Po ukazaniu się prac Yurke i Stolera dalszy rozwój tego typu zagadnień poszedł inną ścieżką, w kierunku schematów typu *event ready* [E36], a sama idea interferencji typu Yurke-Stolera została porzucona. Ten typ interferencji ze względu na nierozróżnialność został gruntownie rozszerzony i ponownie przywrócony do dyskusji w pracach [H2, H1], w których zaproponowaliśmy tzw. protokoły interferometryczne z *niespotykaniem się* cząstek. Chociaż protokoły te działają dla dowolnego rodzaju cząstek (bozonowego czy fermionowego), w poniższym opisie przyjmuję konwencję optyczną, najbliższą realnym możliwościom implementacyjnym.

Najogólniejszy schemat z *niespotykaniem się* cząstek (*no-touching*), zaproponowany w pracy [H2], to schemat interferometryczny oparty na N -modowym interferometrze, w którym mody podzielone są na K M_i -elementowych grup modów, interpretowanych jako podukłady (ilość modów M_i może być różna w zależności od podukładu). Cały protokół składa się z trzech kroków (zobacz Rys. 4):

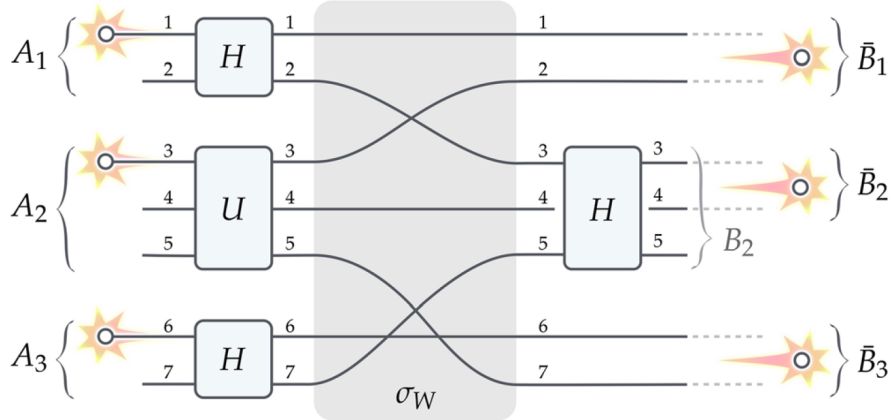
- przygotowanie jednofotonowych stanów wejściowych dla każdej z grup modów A_i , $i = 1, \dots, K$ oraz zastosowanie lokalnych operacji unitarnych U_i implementowanych przez optyczne M_i -porty,
- globalna permutacja modów $\sigma \in S_N$, gdzie S_N jest grupą permutacji N elementów,
- zastosowanie finalnych lokalnych transformacji unitarnych V_i oraz postselekcja na zliczenia jednofotonowe w grupach wybranych $d \leq M_i$ lokalnych modów wyjściowych tworzących podukłady \bar{B}_i .

Wykorzystując kodowanie (tzw. *multirail encoding*), w którym dowolny stan układu d -poziomowego jest reprezentowany przez pojedynczy foton padający na optyczny d -port



Rysunek 4: Ogólny schemat z *niespotykaniem się* cząstek służący do generacji nieklasycznych korelacji. K niezależnych i nierozróżnialnych cząstek pada na $M_i \times M_i$ -wymiarowe optyczne multiporty U_i , $i = 1, \dots, K$, w taki sposób, że każda cząstka wchodzi pierwszym wejściem każdego multiportu. W następnym kroku ścieżki optyczne podlegają permutacji σ . W końcowej fazie realizowana jest druga grupa lokalnych operacji unitarnych V_i , $i = 1, \dots, K$ na M_i -modowych podukładach B_i , oraz dokonywana jest postselekcja na pojedyncze zliczenia w d -modowych podukładach $\bar{B}_i \subset B_i$. Ostatecznie otrzymujemy wyniki pomiarów, które są tożsame z wynikami, jakie otrzymalibyśmy dokonując pomiarów na pewnym K -cząstkowym stanie kwantowym o d -wymiarowych podukładach, którego konkretna postać zależy od operacji $\{U_i\}$, σ oraz $\{V_i\}$. Jeżeli postselekcja jest zaimplementowana w sposób nie powodujący absorpcji (nieodwracalnej detekcji) cząstek, wówczas taki stan kwantowy jest fizycznie otrzymywany na wyjściu z protokołu.

Generation of W state

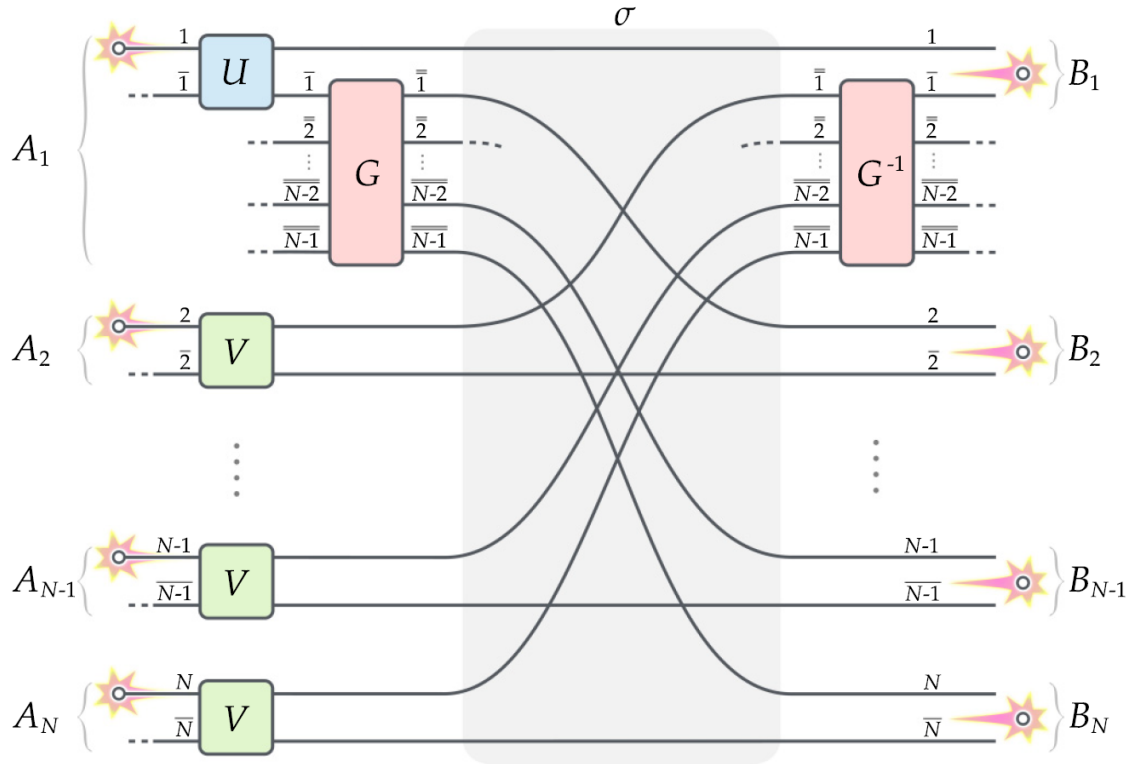


Rysunek 5: Schemat z *niespotykaniem się* fotonów do generacji trzy-kubitowego stanu W (53) zaprezentowany w pracy [H2]. Trzy identyczne fotony wchodzi do podukładów A_1, A_2, A_3 , w których poddawane są lokalnym operacjom unitarnym. Operacja H to bramka Hadamarda, podczas gdy U to pewna specyficzna transformacja trójmodowa. Po dokonaniu permutacji modów σ_W oraz zastosowaniu bramki Hadamarda do modów wyjściowych 3 i 5 wykonywana jest postselekcja na zliczenia jednofotonowe w parach modów: $\bar{B}_1 = \{1, 2\}$, $\bar{B}_2 = \{3, 4\}$ i $\bar{B}_3 = \{6, 7\}$.

realizujący dowolną operację $SU(d)$ [E58], możemy nadać powyższemu schematowi następującą interpretację: stan produktowy K układów M_i -poziomowych jest przetransformowany w ogólności splątany stan K układów d -poziomowych. Termin *niespotykaniem się cząstek* bierze się z faktu, że jeśli przyjmiemy realistyczny punkt widzenia, w którym foton jest rozumiany jako zlokalizowana cząstka punktowa, to możemy wówczas stwierdzić z pewnością, że fotony, które przeszły pozytywnie procedurę postselekcji nie spotkały się nigdy w żadnym miejscu w interferometrze. Stąd jeśli na wyjściu z protokołu otrzymujemy wielofotonowy stan splątany, możemy interpretować ten efekt jako wytworzenie nieklasycznych korelacji tylko i wyłącznie w oparciu o nierozróżnialność fotonów, ponieważ w całym protokole nie ma miejsca na jakiegokolwiek oddziaływanie. Nie ma w nim również miejsca na interferencję typu Hong-Ou-Mandla, która zależy od własności komutacyjnych operatorów kreacji w jednym punkcie przestrzeni (a więc w obrazku realistycznym, kiedy cząstki się spotykają). Możemy powiedzieć, że jedynymi zasobami z jakich korzysta ten protokół generacji splątania są: jednocząstkowa superpozycja oraz nierozróżnialność cząstek.

Obecność postselekcji może wzbudzić uzasadnione wątpliwości odnośnie stosowania powyższego protokołu do testów Bellowskich. Powodem tych wątpliwości jest fakt, że postselekcja zdarzeń wyjściowych może w ogólności wykreować dodatkowe klasyczne korelacje, które mogą oszukać test Bella wykazując fałszywą nieklasyczność [E55, E37, E61]. Jednakże, w niedawnej pracy [O1] wykazaliśmy, że postselekcja, która jest stosowana w diskutowanym protokole, jest bezpieczna z punktu widzenia testów Bellowskich.

Zaproponowany schemat może być traktowany jako ogólny schemat interferometrycznej generacji splątania, który korzysta tylko z produktowych stanów Focka na wejściu do protokołu, pasywnej optyki liniowej (dzielników światła i płytek fazowych) oraz postselekcji. W pracy [H2] zaproponowaliśmy trójfotonowy protokół generacji trzy-kubitowego



Rysunek 6: Schemat z *niespotykaniem się* fotonów dla generacji N -kubitowego stanu W (54) zaprezentowany w pracy [H1]. N identycznych fotonów, po jednym dla każdego z podukładów A_1, \dots, A_N , poddawanych jest lokalnym operacjom unitarnym $U \circ G, V, \dots, V$, zdefiniowanym w [H1]. Następnie wykonywana jest permutacja ścieżek σ , a w pierwszym układzie wyjściowym dodatkowo realizowana jest transformacja unitarna G^{-1} działająca na wszystkie mody tego podukładu za wyjątkiem pierwszego. Na końcu wykonywana jest postselekcja na zliczenia jednofotonowe w dwumodowych podukładach wyjściowych B_i , $i = 1, \dots, N$.

stanu W (patrz Rys. 5):

$$|W_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle), \quad (53)$$

podczas gdy w pracy [H1] przedstawiliśmy N -fotonowy protokół generacji stanu W dla N kubitów (zobacz Rys. 6):

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(|10\dots 0\rangle + |010\dots 0\rangle + \dots + |0\dots 01\rangle). \quad (54)$$

Efektywność tego protokołu skaluje się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu liczby kubitów $\text{Eff}_N \sim \frac{1}{N^2}$, co powoduje, że jest to aktualnie najefektywniejszy protokół generacji stanu W niezawierający aktywnej korekcji (bez dodatkowych korekcyjnych operacji unitarnych, zależnych od wyników pomiarów na dodatkowych cząstkach podczas wykonywania protokołu). Niedawno powstał również protokół o podobnej efektywności, wykorzystujący technikę wymazywania kwantowego (*quantum erasure*) [E42], jednakże wykorzystuje on $N + 1$ fotonów w celu generacji N -kubitowego stanu W , a jego efektywność (w wersji bez aktywnej korekcji) jest nieco słabsza od naszego protokołu z pracy [H1].

5.7 Nieklasyczne własności pojedynczego fotonu

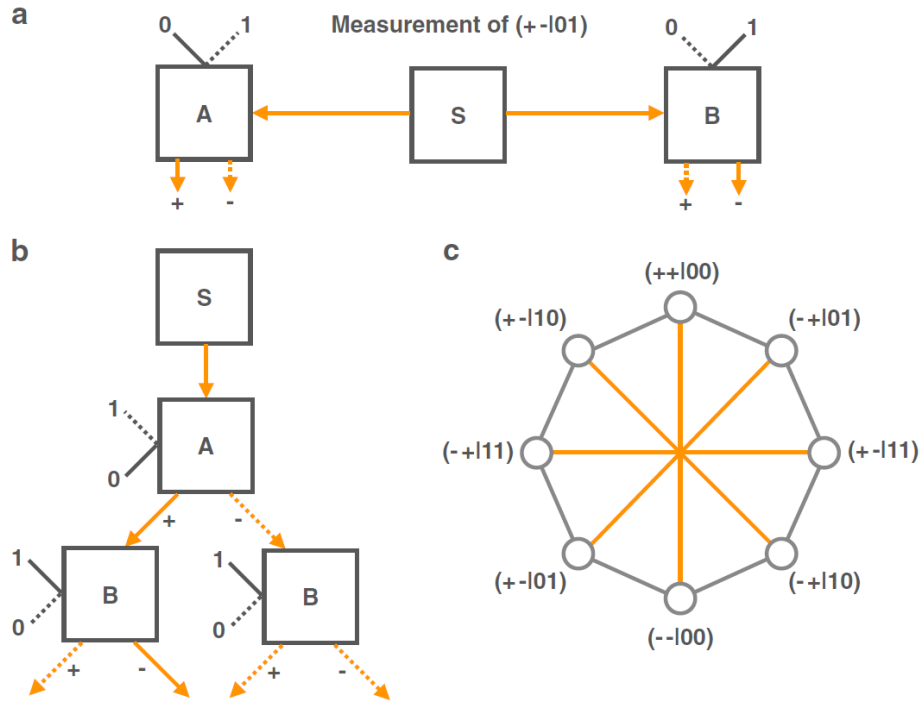
5.7.1 Kontekstualność pojedynczego fotonu a klasyczność fali elektromagnetycznej

Najprostszy eksperyment korelacyjny typu Bellowskiego to eksperyment na dwóch splątanych cząstkach (np. dwa fotony splątane w ścieżkach albo polaryzacjach), które są poddawane lokalnym pomiarom niekompatybilnych dychotomicznych (o wynikach ± 1) obserwabli wybieranych spośród dwóch możliwych ustawień: $\{A_0, A_1\}$ u Alicji i $\{B_0, B_1\}$ u Boba (zobacz Rys. 7 a). Każdy lokalnie realistyczny opis obserwowanych korelacji spełnia nierówność Clausera-Horne'a-Shimony'ego-Holta (CHSH) [E23]:

$$CHSH = |\langle A_0 B_0 \rangle + \langle A_0 B_1 \rangle + \langle A_1 B_0 \rangle - \langle A_1 B_1 \rangle| \leq 2. \quad (55)$$

Dla maksymalnie splątanego stanu początkowego oraz odpowiednio dobranych obserwabli wyrażenie CHSH może osiągnąć maksymalną wartość $CHSH = 2\sqrt{2}$, co pokazuje, że opis lokalnie realistyczny nie jest w tym przypadku możliwy, a obserwowane korelacje wykazują nieklasyczność Bellowską.

Scenariusz Bellowski typu CHSH może być również zrealizowany sekwencyjnie na pojedynczym czteropoziomowym układzie kwantowym (zobacz Rys. 7 b). Wówczas złamanie nierówności CHSH wskazuje na kontekstualność korelacji, a nie na nieklasyczność Bellowską. Co ciekawe, taka sekwencyjna wersja może być zrealizowana za pomocą pojedynczego fotonu, który może obsadzać cztery mody. Dla uproszczenia przyjmujemy, że te mody to dwa mody przestrzenne i dwa polaryzacyjne. Sekwencyjna implementacja wygląda wówczas następująco (zobacz Rys. 7 b). Źródło emituje foton przygotowany w pewnym stanie superpozycji dwóch modów polaryzacyjnych oraz dwóch modów przestrzennych a_H, a_V, b_H i b_V , w których indeksy dolne oznaczają ortogonalne stany polaryzacyjne. Foton wchodzi do dzielnika wiązki A , który może być ustawiony w dwóch konfiguracjach odpowiadających ustawieniom pomiarowym. Mody wyjściowe dzielnika A są połączone z modami wejściowymi do dwóch dzielników polaryzacyjnych B , które implementują pomiar polaryzacji w dwóch różnych bazach. W każdej realizacji eksperymentu ustawienia pierwszego



Rysunek 7: **a)** Standardowy scenariusz Bellowski, w którym źródło S wysyła dwie skorelowane cząstki do dwóch rozseparowanych przestrzennie stacji pomiarowych Alicji i Boba. Zakłada się, że oboje obserwatorzy mają do wyboru dwa ustawienia pomiarowe oznaczane jako $\{0, 1\}$ oraz, że rejestrują oni binarne wyniki $\{+, -\}$. Na rysunku symbolicznie przedstawiono zdarzenie $(+ - |01)$. **b)** Sekwencyjna realizacja tego samego schematu pomiarowego, w której zakładamy, że obserwabla A i B są kompatybilne, podobnie jak ma to miejsce w przypadku **a)**. Wynik obserwabli A jest tutaj zakodowany w ścieżkach wyjściowych $+$ i $-$. Może on być ustalony dopiero po wykonaniu drugiego pomiaru B , poprzez sprawdzenie, czy detekcja nastąpiła w lewej (wynik $+$) czy prawej (wynik $-$) stacji pomiarowej B . Na rysunku przedstawiono sytuację, w której kliknął detektor $-$ w lewej stacji pomiarowej B , stąd łączne zarejestrowane zdarzenie to znów $(+ - |01)$. **c)** Graf ekskluzywności (rozłączności) dla nierówności CHSH (58). Graf składa się z ośmiu wierzchołków reprezentujących zdarzenia pomiarowe występujące we wzorze (58) oraz z dwunastu krawędzi łączących wierzchołki reprezentujące zdarzenia wzajemnie rozłączne.

dzielnika A i dwóch dzielników B są wybierane losowo, przy czym oba dzielniki B realizują pomiar polaryzacji w tej samej bazie. W ten sposób można zaimplementować pomiar korelacji $\langle A_i B_j \rangle$, gdzie A_i oznacza dychotomiczny pomiar "w której ścieżce", natomiast B_j oznacza dychotomiczny pomiar polaryzacji. Istotnie, w wyniku pomiaru otrzymujemy cztery możliwe zdarzenia, które oznaczamy jako: $(++|ij)$, $(+-|ij)$, $(-+|ij)$ i $(--|ij)$, gdzie zdarzenie $(++|ij)$ oznacza koniunkcję dwóch zdarzeń: $A_i = B_j = +1$, i podobnie dla pozostałych (zobacz Rys. 7 b). Zauważmy, że w pojedynczej realizacji eksperymentu obserwujemy zawsze pojedyncze kliknięcie detektora, odpowiadające jednemu z czterech wspomnianych zdarzeń. Jednakże po wielu powtórzeniach można oszacować prawdopodobieństwa $p(++|ij)$, $p(+-|ij)$, $p(-+|ij)$ i $p(--|ij)$, które mogą być użyte do obliczenia funkcji korelacji:

$$\langle A_i B_j \rangle = p(++|ij) - p(+-|ij) - p(-+|ij) + p(--|ij). \quad (56)$$

Poprzez przygotowanie odpowiedniego stanu pojedynczego fotonu w czterech modach oraz wybranie odpowiednich obserwabli $\{A_i\}$ i $\{B_j\}$ możemy otrzymać łamanie nierówności CHSH (55), co dowodzi kontekstualności obserwowanych korelacji.

Ciekawe zjawisko występuje, kiedy zamiast pojedynczego fotonu użyjemy N identycznie przygotowanych fotonów, albo klasycznego strumienia światła. Ponieważ fotony na pasywnych urządzeniach optyki liniowej (dzielnikach i płytkach fazowych) transformują się niezależnie, oraz ponieważ fale elektromagnetyczne transformują się na nich tak samo jak jednofotonowe kwantowe amplitudy prawdopodobieństwa, obserwowane prawdopodobieństwa wyników będą proporcjonalne odpowiednio do $Np(++|ij)$, $Np(+-|ij)$, $Np(-+|ij)$ i $Np(--|ij)$, oraz do $I(++|ij)$, $I(+-|ij)$, $I(-+|ij)$ i $I(--|ij)$, gdzie N oznacza liczbę fotonów, natomiast I oznacza intensywność fali zmierzoną w odpowiednim porcie wyjściowym. Możemy zdefiniować dwie zmienne losowe:

$$\begin{aligned} \chi_{ij}^{(N)} &= \frac{1}{N}(n(++|ij) - n(+-|ij) - n(-+|ij) + n(--|ij)), \\ \chi_{ij}^{(cl)} &= \frac{1}{I}(I(++|ij) - I(+-|ij) - I(-+|ij) + I(--|ij)), \end{aligned} \quad (57)$$

gdzie $n(++|ij)$ jest liczbą fotonów zarejestrowaną w modzie wyjściowym $++$, N jest całkowitą liczbą fotonów, $I(++|ij)$ jest intensywnością zmierzoną w modzie wyjściowym $++$ natomiast I jest całkowitą intensywnością. Można przygotować klasyczny stan światła, dla którego nierówność (55) z korelacjami zdefiniowanymi wzorem (57), $\langle A_i B_j \rangle = \langle \chi_{ij}^{(cl)} \rangle$, może zostać złamana. Fakt ten motywuje do postawienia pytania, czy klasyczne światło może wykazywać własności kontekstualne w związku z łamaniem nierówności Bella. W całej serii prac [E65, E66, E57, E4, E28] dyskutowano podobne scenariusze, w których pokazywano, że klasyczne światło może być źródłem kontekstualnych korelacji, argumentując, że takie pojęcia jak splątanie czy kontekstualność nie ograniczają się tylko do mechaniki kwantowej. Wszystkie te przykłady oparte są na identycznym schemacie, mianowicie punktem wyjścia jest scenariusz kwantowy, który następnie transformowany jest na scenariusz klasyczny, w którym kwantowe prawdopodobieństwa są symulowane za pomocą względnych intensywności klasycznej fali. Te względne intensywności są następnie podstawą do zdefiniowania funkcji korelacji, na podstawie których wykazuje się łamanie nierówności Bella.

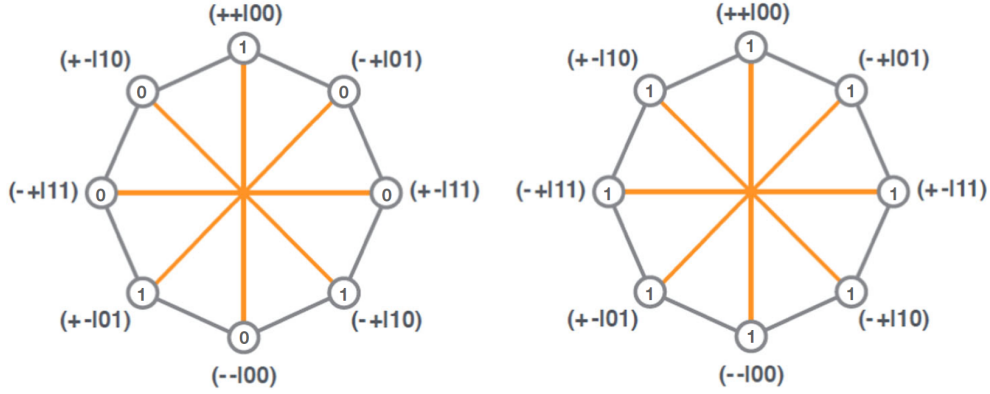
W pracy [H6] pokazujemy, że takie podejście do analizy korelacji jest całkowicie nieprawidłowe w związku z pewną szczególną cechą w strukturze obserwowanych zdarzeń. Przedstawię najpierw nasze rozumowanie w sposób nieformalny. Jeśli przeprowadzamy rzeczonego eksperyment na pojedynczym fotonie, to wszystkie cztery możliwe zdarzenia pomiarowe są

rozłączne, gdyż w pojedynczej realizacji eksperymentu może pojawić się tylko pojedyncze zliczenie fotonu. Jeśli jednak przeprowadzimy ten sam eksperyment z większą liczbą fotonów, lub w przypadku granicznym z klasyczną falą, to zdarzenia pomiarowe przestają być rozłączne. W przypadku eksperymentu z klasyczną falą możemy zmierzyć względne natężenia we wszystkich modach wyjściowych równocześnie, rozłączność zdarzeń znika więc w tym przypadku całkowicie. Okazuje się, że to właśnie zanik rozłączności zdarzeń pomiarowych uniemożliwia złamanie nierówności Bella. Mianowicie w takim przypadku klasyczne ograniczenie dla wyrażenia Bella (czyli lewej strony nierówności typu (55)) podnosi się i osiąga maksymalną wartość algebraiczną, co powoduje, że nie ma miejsca na jakiegokolwiek łamanie nierówności Bella oznaczające efekty kontekstualne. Aby wyjaśnić całe to zjawisko w sposób formalny, w pracy [H6] wykorzystujemy formalizm grafów ekskluzywności (rozłączności).

Podstawą naszej analizy jest teoriografowy sposób opisu korelacji w układach fizycznych, oparty na relacjach rozłączności pomiędzy możliwymi zdarzeniami pomiarowymi, zaproponowany przez Cabello, Severiniego oraz Wintera w pracy [E15]. Omówimy ten model na podstawie scenariusza CHSH. Nierówność CHSH (55) może być wyrażona za pomocą prawdopodobieństw koincydencyjnych detekcji:

$$\begin{aligned} CHSH &= p(+ - |11) + p(- + |11) + p(+ - |01) + p(- + |01) + p(+ - |10) \\ &+ p(- + |10) + p(+ + |00) + p(- - |00) \leq 3. \end{aligned} \quad (58)$$

Prawdopodobieństwa występujące w powyższym wzorze mogą pochodzić z różnych modeli probabilistycznych (klasycznych, kwantowych, ponadkwantowych), muszą one jednak spełniać *regułę rozłączności*, czyli założenie, że suma prawdopodobieństw zdarzeń w ramach każdego *kontekstu eksperymentalnego* (podzbioru zdarzeń wzajemnie rozłącznych) nie może przekraczać jedności. Klasyczne ograniczenie występujące w tej nierówności może być wyznaczone wyłącznie w oparciu o strukturę rozłączności zdarzeń. Przedstawiamy osiem zdarzeń występujących w powyższej wersji nierówności CHSH za pomocą wierzchołków grafu, w którym łączymy wierzchołki odpowiadające zdarzeniom rozłącznym. W ten sposób otrzymujemy graf rozłączności dla danego eksperymentu korelacyjnego (zobacz Rys. 7 c). Jak pokazano w pracy [E15], maksymalna wartość sumy klasycznych (pochodzących z niekontekstualnego modelu) prawdopodobieństw zdarzeń odpowiadających danemu grafowi rozłączności jest równa rozmiarowi *największego zbioru niezależnego*, czyli zbioru wzajemnie niesąsiadujących wierzchołków. Podsumowując, kontekstualność korelacji w danym scenariuszu eksperymentalnym może być testowana poprzez znalezienie liczności największego zbioru niezależnego w odpowiadającym mu grafie rozłączności, a następnie sprawdzenie, czy prawdopodobieństwa zdarzeń przewidywane przez konkretny model fizyczny łamią ograniczenie implikowane przez tę liczbę. Aby móc dyskutować problem kontekstualności korelacji dla przejścia od pojedynczego fotonu do klasycznej fali wykorzystaliśmy zmodyfikowany model grafów rozłączności [E44], w którym do każdego zdarzenia-wierzchołka przypisuje się ilość fotonów. Model niekontekstualny przypisuje jednoznacznie liczbę fotonów do każdego zdarzenia w sposób zgodny ze strukturą rozłączności. Struktura ta jest rozumiana w zmodyfikowanym modelu nieco inaczej, mianowicie, jeśli co najwyżej N fotonów może być przypisanych do jednego zdarzenia, to co najwyżej N fotonów może być również przypisanych do zdarzeń w ramach jednego kontekstu, czyli podzbioru zdarzeń wzajemnie rozłącznych. Nierówność CHSH dla zmodyfikowanego modelu ma bardzo



Rysunek 8: Niekontekstualne przypisania liczb obsadzeń do zdarzeń w grafie rozłączności dla nierówności CHSH, maksymalizujące niekontekstualne ograniczenie dla tej nierówności (59). Lewy obrazek odpowiada sytuacji jednofotonowej (co najwyżej jeden foton może być przypisany do kontekstu), natomiast prawy obrazek odpowiada sytuacji dwufotonowej (co najwyżej dwa fotony na kontekst).

podobną formę do wcześniejszej (por. wzór (58)):

$$\begin{aligned}
CHSH &= \frac{1}{N} (n(+ - |11) + n(- + |11) + n(+ - |01) + n(- + |01) \\
&\quad + n(+ - |10) + n(- + |10) + n(+ + |00) + n(- - |00)) \leq \mathcal{C}(N),
\end{aligned} \tag{59}$$

w której zamiast prawdopodobieństw występują względne liczby obsadzeń. Ograniczenie $\mathcal{C}(N) = \frac{C_N}{N}$, w którym C_N jest maksymalną wartością niekontekstualnie przypisanych liczb obsadzeń zgodnych z relacjami rozłączności, zależy bezpośrednio od całkowitej liczby fotonów N . W przypadku pojedynczego fotonu wynosi ono $\mathcal{C}(1) = 3$, podobnie jak w przypadku oryginalnego modelu grafowego z prawdopodobieństwami zamiast liczb obsadzeń. Jednak już w przypadku dwóch fotonów można w sposób niekontekstualny przypisać jeden foton do każdego zdarzenia-wierzchołka, tak aby zachowane zostały reguły rozłączności, stąd $\mathcal{C}(2) = \frac{8}{2} = 4$ (zobacz Rys. 8). Jest to tak naprawdę największa możliwa wartość osiągalna przez dowolny model spełniający reguły rozłączności. Przejdźmy teraz do kwestii klasycznej granicy dla nierówności CHSH. Przez granicę klasyczną rozumiemy makroskopową granicę silnego strumienia cząstek kwantowych (np. fotonów), która spełnia następujące własności: (i) względne liczby obsadzeń dążą w granicy do względnych intensywności strumienia, (ii) stosunek odchylenia standardowego liczby cząstek w danym modzie do średniej liczby cząstek dąży do zera. Dzięki drugiemu założeniu makroskopowe intensywności mogą być traktowane jako wielkości deterministyczne. Przejście od pojedynczego fotonu do klasycznej fali spełnia oba powyższe założenia, gdyż klasyczna fala może być traktowana jako granica silnego strumienia fotonów w stanie koherentnym, dla którego odchylenie standardowe liczby fotonów skaluje się jak pierwiastek kwadratowy ze średniej liczby fotonów (rozkład Poissona). W granicy klasycznej nierówność CHSH (59) przechodzi w następującą nierówność opartą na intensywnościach:

$$\begin{aligned}
CHSH &= \frac{1}{I} (I(+ - |11) + I(- + |11) + I(+ - |01) + I(- + |01) \\
&\quad + I(+ - |10) + I(- + |10) + I(+ + |00) + I(- - |00)) \leq \mathcal{C}_cl = 4,
\end{aligned} \tag{60}$$

dla której ograniczenie klasyczne (niekontekstualne) wynosi $\mathcal{C}_{cl} = 4$, czyli tyle samo co w przypadku nierówności dla dwóch fotonów. Ponieważ ograniczenie to obowiązuje dla każdej teorii (klasycznej, kwantowej, ponadkwantowej) spełniającej reguły rozłączności, nie ma możliwości złamania powyższej nierówności w żadnym scenariuszu fizycznym, a zatem w szczególności klasyczne światło nie może przejawiać własności niekontekstualnych.

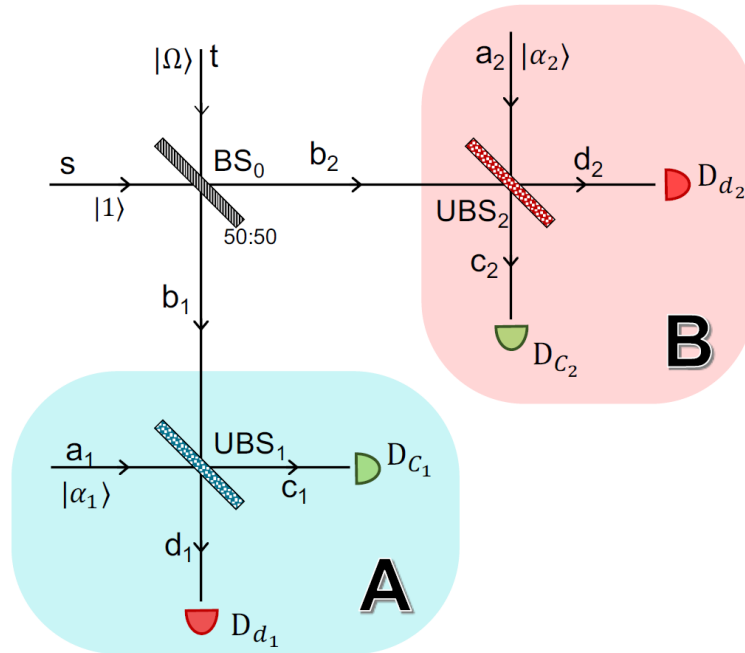
Rozdział ten wymaga trzech dodatkowych komentarzy. Po pierwsze, największa osiągalna fizycznie wartość dla wyrażenia CHSH (60) to $2 + \sqrt{2} \approx 3.41$ [E16]. Wartość ta nie zależy od implementacji fizycznej: jest taka sama w przypadku eksperymentów z pojedynczymi fotonami jak i z klasyczną falą. Dzieje się tak, ponieważ kwantowe amplitudy prawdopodobieństwa dla pojedynczego fotonu transformują się pod wpływem pasywnych urządzeń optycznych tak samo jak makroskopowe fale elektromagnetyczne. Jednakże, tylko implementacja jednofotonowa przejawia własności kontekstualne, gdyż dla większej liczby fotonów oraz dla granicy klasycznej fali ograniczenie klasyczne (niekontekstualne) w nierówności CHSH jest przesunięte powyżej granicy osiągalnej fizycznie. Po drugie, zauważmy, że to przesunięcie klasycznego ograniczenia wynika z osłabienia relacji rozłączności pomiędzy zdarzeniami przy przejściu od pojedynczego fotonu do klasycznej fali. Fakt ten pokazuje, że nieklasyczność korelacji nie jest zdeterminowana wyłącznie przez wielkość funkcji korelacji, ale również przez relacje rozłączności pomiędzy zdarzeniami pomiarowymi. Jak pokazaliśmy na podstawie scenariusza CHSH, może się zdarzyć, że przy przejściu od pojedynczego fotonu do klasycznej fali siła korelacji pozostaje stała, jednak nieklasyczny charakter korelacji zanika w związku z osłabieniem reguł rozłączności (brak "pojedynczych kliknięć detektorów"). Po trzecie, zauważmy, że dyskutowany przykład scenariusza CHSH jest tylko jednym z wielu możliwych testów kontekstualności. Jednakże, w pracy [H6] pokazaliśmy, że podobne rozumowanie stosuje się w dowolnym przypadku, mianowicie w granicy makroskopowej ograniczenie niekontekstualne dla dowolnej nierówności testującej kontekstualność korelacji osiąga wartość taką samą, jaką przejawia najogólniejszy model probabilistyczny spełniający (uogólnione) reguły rozłączności. Stąd wniosek, że klasyczne fale elektromagnetyczne nie mogą przejawiać własności kontekstualnych w żadnym scenariuszu fizycznym.

5.7.2 Nieklasyczność Bella dla pojedynczego fotonu

Ten rozdział jest poświęcony nieklasyczności Bella, która może być obserwowana dla korelacji powstających w wyniku pomiarów pojedynczego fotonu będącego w stanie superpozycji dwóch modów przestrzennych. Schemat eksperymentalny dyskutowany w naszej pracy [H3] został zaproponowany przez Tana, Wallsa i Colletta (TWC) w historycznie pierwszym artykule poświęconym Bellowskiej nieklasyczności pojedynczego fotonu [E67], zobacz Rys. 9. Pojedynczy foton pada na symetryczny dzielnik wiązki, który wytwarza superpozycję wzbudzeń jednofotonowych w modach przestrzennych b_1 i b_2 :

$$|\psi\rangle_{b_1, b_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|01\rangle_{b_1, b_2} + i |10\rangle_{b_1, b_2} \right]. \quad (61)$$

Mimo, że powyższy stan opisuje w rzeczywistości jednofotonowe wzbudzenie pola w stanie superpozycji, to jednak w reprezentacji liczby obsadzeń jest on modowo splątany, co skłania do postawienia pytania o jego możliwe nieklasyczne własności. W oryginalnej pracy TWC mody b_1 i b_2 są poddawane pomiarom homodynowym ze słabym lokalnym oscylatorem (stanem koherentnym o średniej liczbie fotonów mniejszej od jedności) przez dwóch lokalnych obserwatorów. Lokalny układ pomiarowy składa się z symetrycznego dzielnika światła BS_i , który dokonuje superpozycji modu b_i z lokalnym oscylatorem $|\alpha e^{i\theta_i}\rangle$. W fazie



Rysunek 9: Ogólny schemat do badania nieklasyczości korelacji powstających dzięki pojedynczemu fotonowi będącemu w superpozycji dwóch modów przestrzennych za pomocą detekcji homodynowej. Pojedynczy foton w modzie s pada na dzielnik wiązki BS_0 . Dwa mody wyjściowe b_1 oraz b_2 są poprowadzone do dwóch stacji pomiarowych, gdzie podlegają superpozycji ze światłem koherentnym $|\alpha_i e^{i\theta_i}\rangle$ z tzw. lokalnych oscylatorów na dzielnikach UBS_1 i UBS_2 . W końcowej fazie wykonywane są pomiary liczby fotonów w modach wyjściowych lokalnych dzielników światła c_j oraz d_j . W oryginalnym schemacie z pracy [E67] dzielniki UBS_1 i UBS_2 są symetryczne, a amplitudy lokalnych oscylatorów $\alpha_i = \alpha$ są identyczne dla obu obserwatorów i obu lokalnych ustawień pomiarowych. W zmodyfikowanym schemacie, zaproponowanym w naszej pracy [H3], dzielniki UBS_1 i UBS_2 mają dowolne regulowane współczynniki transmisji, a amplitudy lokalnych oscylatorów α_i są również regulowane i mogą różnić się pomiędzy obserwatorami jak i ustawieniami.

końcowej wykonywany jest pomiar liczby fotonów w modach wyjściowych c_i i d_i za pomocą detektorów D_{c_i} oraz D_{d_i} . W eksperymencie TWC lokalne ustawienia pomiarowe odpowiadają wyborowi faz $\{\theta_i, \theta'_i\}$ lokalnych oscylatorów. Aby wykazać nieklasyczość korelacji w zaproponowanym schemacie pomiarowym, autorzy pracy [E67] wykorzystali nierówności typu Bella zawierające korelacje intensywności [E59], mające postać:

$$|E_T(\theta_1, \theta_2) + E_T(\theta'_1, \theta_2) + E_T(\theta_1, \theta'_2) - E_T(\theta'_1, \theta'_2)| \leq 2, \quad (62)$$

gdzie teoretyczne funkcje korelacji dla lokalnych intensywności są zdefiniowane jako:

$$E_T(\theta_1, \theta_2) = \frac{\int d\lambda \rho(\lambda) \prod_{j=1,2} (I_{c_j}(\theta_j, \lambda) - I_{d_j}(\theta_j, \lambda))}{\int d\lambda \rho(\lambda) I_1(\lambda) I_2(\lambda)}. \quad (63)$$

W powyższym wzorze $I_{x_j}(\theta_j, \lambda)$ oznacza lokalną intensywność w modzie x_j dla $x = c, d$ i $j = 1, 2$, przewidywaną przez model ukrytych zmiennych, natomiast $I_j(\lambda)$ jest całkowitą lokalną intensywnością. Optyka kwantowa przewiduje natomiast następującą postać tej funkcji korelacji:

$$\begin{aligned} E_T(\theta_1, \theta_2) &= \frac{\langle \Psi(\alpha) | (\hat{n}_{c_1} - \hat{n}_{d_1})(\hat{n}_{c_2} - \hat{n}_{d_2}) | \Psi(\alpha) \rangle}{\langle \Psi(\alpha) | (\hat{n}_{c_1} + \hat{n}_{d_1})(\hat{n}_{c_2} + \hat{n}_{d_2}) | \Psi(\alpha) \rangle} \\ &= A_T(\alpha) \sin(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned} \quad (64)$$

gdzie $A_T(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}$, natomiast $|\Psi(\alpha)\rangle$ jest całkowitym stanem początkowym z uwzględnieniem lokalnych oscylatorów:

$$|\Psi(\alpha)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha e^{i\theta_1}\rangle_{a_1} (|01\rangle_{b_1 b_2} + i |10\rangle_{b_1 b_2}) |\alpha e^{i\theta_2}\rangle_{a_2}. \quad (65)$$

Podstawiając wyrażenie (64) do nierówności (62) oraz optymalizując po lokalnych fazach $\{\theta_1, \theta'_1\}$ i $\{\theta_2, \theta'_2\}$ otrzymuje się łamanie nierówności (62) dla następującego zakresu amplitud: $0 < \alpha^2 < 0.414$. Jednakże, w naszej pracy [O5] pokazaliśmy, że dla tego zakresu parametru α wyjściowy rozkład prawdopodobieństwa może być dokładnie odtworzony przez model lokalnych zmiennych ukrytych. W pracy [H3] wyjaśniamy, że źródłem błędu w analizie dokonanej przez TWC [E67] jest ukryte założenie w wyprowadzeniu nierówności (62), które mówi, że całkowita lokalna intensywność jest niezależna od lokalnego ustawienia pomiarowego:

$$I_j(\lambda) = I_{c_j}(\theta_j, \lambda) + I_{d_j}(\theta_j, \lambda). \quad (66)$$

Założenie to nakłada nietrywialne ograniczenia na formę możliwych modeli zmiennych ukrytych dla intensywności, i jest ono jawnie łamane przez model zaprezentowany w pracy [O5].

W pracy [H3] pokazujemy, jak wyprowadzić poprawną nierówność Bella dla schematu TWC. W tym celu używamy *intensywności relatywnych* (ang. *intensity rates*), wprowadzonych w [E39, E38]. Są one zdefiniowane jako:

$$R_{x_j}(\theta_j, \lambda) = \frac{I_{x_j}(\theta_j, \lambda)}{I_{c_j}(\theta_j, \lambda) + I_{d_j}(\theta_j, \lambda)}, \quad (67)$$

wraz z dodatkowym założeniem, że $R_{x_j} = 0$ jeśli tylko całkowita intensywność w mianowniku wynosi 0. Wykorzystując intensywności relatywne możemy zdefiniować funkcję korelacji dla eksperymentu TWC jako:

$$E_R(\theta_1, \theta_2) = \left\langle \prod_{j=1}^2 (R_{c_j}(\theta_j, \lambda) - R_{d_j}(\theta_j, \lambda)) \right\rangle_{HV}, \quad (68)$$

gdzie indeks *HV* (*Hidden Variable*) podkreśla, że mamy do czynienia z uśrednianiem po zmiennej ukrytej. Wstawiając powyższą definicję funkcji korelacji do wyrażenia CHSH otrzymujemy poprawną nierówność Bella dla schematu TWC:

$$|E_R(\theta_1, \theta_2) + E_R(\theta'_1, \theta_2) + E_R(\theta_1, \theta'_2) - E_R(\theta'_1, \theta'_2)| \leq 2. \quad (69)$$

Zauważmy, że dzięki zmodyfikowanej formie funkcji korelacji (68) nierówność (69) nie zależy od dodatkowego założenia (66), ponieważ całkowita lokalna intensywność w mianowniku wyrażenia (67) jawnie zależy od ustawień. Kwantowomechaniczne wyrażenie na intensywności względne ma postać:

$$\hat{R}_{x_j} = \hat{\Pi}_{c_j d_j} \frac{\hat{n}_{x_j}}{\hat{n}_{c_j} + \hat{n}_{d_j}} \hat{\Pi}_{c_j d_j}, \quad (70)$$

gdzie operatory $\hat{\Pi}_{c_j d_j} = \mathbb{1}_{c_j d_j} - |\Omega_{c_j d_j}\rangle \langle \Omega_{c_j d_j}|$ są projektorami na sektor przestrzeni Focka niezawierający próżni w modach c_j i d_j . Korzystając z powyższej definicji można zapisać kwantową funkcję korelacji:

$$\begin{aligned} E_R(\theta_1, \theta_2) &= \langle \Psi(\alpha) | \hat{H}_1(\theta_1) \hat{H}_2(\theta_2) | \Psi(\alpha) \rangle \\ &= A_R(\alpha) \sin(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned} \quad (71)$$

gdzie operatory \hat{H}_i są zdefiniowane jako:

$$\hat{H}_j(\theta_j) = \hat{R}_{c_j} - \hat{R}_{d_j} = \hat{\Pi}_{c_j d_j} \frac{\hat{n}_{c_j} - \hat{n}_{d_j}}{\hat{n}_{c_j} + \hat{n}_{d_j}} \hat{\Pi}_{c_j d_j}, \quad (72)$$

natomiast amplituda $A_R(\alpha)$ wynosi:

$$A_R(\alpha) = \frac{e^{-2\alpha^2} (e^{\alpha^2} - 1)^2}{\alpha^2}. \quad (73)$$

W pracy [H3] pokazujemy, że nierówność Bella (69) dla schematu TWC jest zawsze spełniona, co jest konsyistentne z faktem, że dla tego schematu pomiarowego istnieje model lokalnych zmiennych ukrytych. Jednocześnie pokazujemy, że obie nierówności (62) i (69) mogą być wykorzystane do wykrywania splątania, jednak tylko nierówność (69) może być stosowana do wykrywania nieklasyczości Bellowskiej.

Aby poprawnie wykazać nieklasyczość Bella dla eksperymentu z jednym fotonem i lokalnymi pomiarami homodynowymi trzeba zmodyfikować schemat TWC. W naszej pracy zaproponowaliśmy modyfikację polegającą na wprowadzeniu dowolnych (posiadających dowolny współczynnik transmisji) dzielników wiązki dla pomiarów homodynowych, jak również na wykorzystaniu lokalnych oscylatorów ze zmienną amplitudą. Zakładamy, że lokalne ustawienia pomiarowe zależą od trzech parametrów: amplitudy lokalnego oscylatora α_i , oraz dwóch parametrów kątowych (χ_i, θ_i) opisujących dowolny dzielnik wiązki BS_i realizujący transformację $SU(2)$ w postaci:

$$U_{BS_i}(\chi_i, \theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \chi_i & e^{-i\theta_i} \sin \chi_i \\ -e^{i\theta_i} \sin \chi_i & \cos \chi_i \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Zauważmy, że $\cos^2 \chi_i$ jest współczynnikiem transmisji dla dzielnika wiązki, natomiast θ_i oznacza fazę wiązki odbitej. Zamiast nierówności typu CHSH wykorzystujemy nierówność Clausera-Horne'a (CH) [E22]:

$$\begin{aligned} -1 \leq P(A, B) + P(A, B') + P(A', B) - P(A', B') \\ - P(A) - P(B) \leq 0, \end{aligned} \quad (75)$$

w której $P(\cdot, \cdot)$ oznacza łączne prawdopodobieństwo, $P(\cdot)$ oznacza prawdopodobieństwo lokalne, A, A' oznaczają wybrane zdarzenia pomiarowe po stronie Alicji, natomiast B, B' oznaczają odpowiednie zdarzenia po stronie Boba. Aby wykazać nieklasyczość Bella w zmodyfikowanym schemacie TWC, stosujemy nierówność CH dla intensywności relatywnych. Nierówność taka powstaje poprzez podstawienie pod prawdopodobieństwa w nierówności (75) intensywności relatywnych:

$$\begin{aligned} -1 \leq & K(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + K(\vec{v}'_1, \vec{v}_2) + K(\vec{v}_1, \vec{v}'_2) - K(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2) \\ & -S_1(\vec{v}_1) - S_2(\vec{v}_2) \leq 0, \end{aligned} \quad (76)$$

gdzie funkcje korelacji oraz wyrażenia lokalne mają postać:

$$\begin{aligned} K(\vec{v}_1, \vec{v}_2) &= \langle R_{d_1}(\vec{v}_1) R_{d_2}(\vec{v}_2) \rangle_{HV}, \\ S_j(\vec{v}_j) &= \langle R_{d_j}(\vec{v}_j) \rangle_{HV}. \end{aligned} \quad (77)$$

W powyższych wyrażeniach wektory \vec{v}_i określają lokalne ustawienia pomiarowe. Przyjmujemy schemat ustawień w tzw. formie *on/off*, zainspirowanej pracą Hardy'ego [E29], w której w jednym z ustawień (ustawienie *off*) lokalny oscylator jest wyłączony, natomiast lokalny dzielnik wiązki jest ustawiony jako identyczność:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (0, 0, 0) \\ \vec{v}'_1 &= (\chi'_1, \alpha'_1, \theta'_1) \\ \vec{v}_2 &= (0, 0, 0) \\ \vec{v}'_2 &= (\chi'_2, \alpha'_2, \theta'_2). \end{aligned} \quad (78)$$

W pracy [H3] pokazujemy, że nierówność Bella (76) jest łamana z lewej strony, osiągając minimalną wartość -1.0239 . Niemal optymalne ustawienia pomiarowe mają postać:

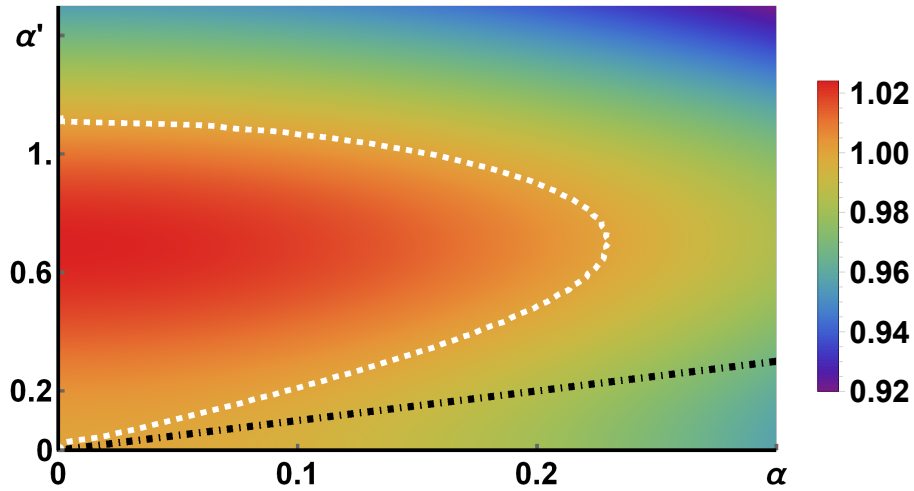
$$\begin{aligned} \vec{v}'_1 &= \left(\chi'_1 = \frac{3\pi}{20}, \alpha'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta'_1 = 0 \right), \\ \vec{v}'_2 &= \left(\chi'_2 = \frac{3\pi}{20}, \alpha'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta'_2 = -\frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (79)$$

co odpowiada dzielnikom wiązki ze współczynnikiem transmisji wynoszącym około 79% oraz lokalnym oscylatorom ze średnią liczbą fotonów wynoszącą $\frac{1}{2}$. Pokazaliśmy również, że łamanie nierówności (76) można uzyskać dla ustawień niespełniających reguły *on/off*, jednak odstępstwo od tego schematu ustawień nie może być zbyt silne. Aby to zademonstrować (patrz Rys. 10) przyjęliśmy następujący schemat ustawień pomiarowych:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (\chi_1, \alpha, \theta_1), \\ \vec{v}'_1 &= (\chi'_1, \alpha', \theta'_1), \\ \vec{v}_2 &= (\chi_2, \alpha, \theta_2), \\ \vec{v}'_2 &= (\chi'_2, \alpha', \theta'_2), \end{aligned} \quad (80)$$

w którym amplitudy lokalnych oscylatorów odpowiadających danemu ustawieniu są identyczne dla obu obserwatorów.

Podsumowując, w pracy [H3] pokazaliśmy, jak skonstruować poprawne nierówności Bella dla schematu pomiarowego z jednym fotonem będącym w stanie superpozycji dwóch



Rysunek 10: Wykres przedstawiający wartość wyrażenia CH dla intensywności relatywnych (76), dla ustawień pomiarowych (80), jako funkcję dwóch amplitud lokalnych oscylatorów odpowiadających lokalnym ustawieniom. Zakładamy, że obaj obserwatorzy stosują te same wartości amplitud lokalnych oscylatorów $\{\alpha, \alpha'\}$ dla odpowiadających sobie ustawień. Znak wyrażenia CH jest odwrócony ze względu na klarowność prezentacji. Przedstawione wartości wyrażenia CH dla ustalonych wartości ustawień $\{\alpha, \alpha'\}$ odpowiadają wyrażeniu CH zminimalizowanemu po wartościach pozostałych ustawień (transmisyjności i fazie światła odbitego w dzielnikach). Biała przerywana linia stanowi obwiednię obszaru łamania nierówności CH, natomiast czarna przerywana linia odpowiada prostej: $\alpha = \alpha'$. Optymalne łamanie nierówności CH jest osiągnięte dla schematu ustawień typu *on/off*, kiedy jedno z ustawień lokalnego oscylatora odpowiada amplitudzie $\alpha = 0$. Widać wyraźnie, że łamanie nierówności CH występuje również dla ustawień niespełniających reguły *on/off*, kiedy to obie amplitudy α i α' są niezerowe, jednak nigdy nie występuje ono dla wartości amplitud lokalnych oscylatorów identycznych dla obu ustawień: $\alpha = \alpha'$.

modów przestrzennych. Wskazaliśmy na źródło błędu w podejściu TWC [E67], pokazując, że modulacja amplitudy (a nie tylko fazy) lokalnych oscylatorów jest konieczna celem wykazania nieklasyczości Bella w omawianym schemacie.

Na koniec przedstawię dwie uwagi. Pierwsza kwestia to pytanie, dlaczego w schemacie TWC jak i w kolejnych pracach dotyczących nieklasyczości Bella pojedynczego fotonu wykorzystywano pomiary homodynowe. Przyczyna takiego wyboru tkwi w fakcie, że aby wykazać nieklasyczość Bella stanu (61) potrzeba w jednym z ustawień pomiarowych wykonać lokalny pomiar w bazie *komplementarnej* do bazy liczby obsadzeń. Taki pomiar jest niemożliwy do zrealizowania bez użycia dodatkowych stanów optycznych, służących jako tzw. układ odniesienia [E52], stąd obecność lokalnych oscylatorów (bądź ich niskofotonowych przybliżeń) jest niezbędna.

Druga ważna kwestia to pozornie jednofotonowy charakter omawianego eksperymentu, a dokładniej obserwowanych korelacji. W pracy [H3] podkreślamy, że rzeczony eksperyment jest z natury wielofotonowy, ponieważ obserwowana nieklasyczość Bella jest skutkiem interferencji fotonu pochodzącego ze stanu źródłowego z fotonami z lokalnych oscylatorów ze względu na ich *nierozróżnialność*. Na etapie detekcji rozróżnienie pomiędzy tymi fotonami nie istnieje, stąd nie ma sensu przypisywać obserwowanych korelacji do pojedynczego fotonu.

6 Prezentacja osiągnięć dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę

6.1 Osiągnięcia dydaktyczne

Nauczanie akademickie:

- Prowadzenie ćwiczeń audytoryjnych z przedmiotu *Algebra Liniowa*, na kierunku Fizyka, I rok, 90 godzin, Uniwersytet Gdański, październik 2011 – luty 2012.

Nauczanie pozaakademickie:

- Prowadzenie zajęć na Kółku Olimpijskim w III Liceum Ogólnokształcącym w Gdyni, marzec – czerwiec 2014.

6.2 Osiągnięcia organizacyjne

- Członek lokalnego komitetu organizacyjnego konferencji: 9th Biennial IQSA Meeting, Quantum Structures, Brussels - Gdańsk 2008.
Materiały pokonferencyjne dostępne pod adresem:
<https://doi.org/10.1007/s10773-010-0513-0>

6.3 Osiągnięcia w popularyzowaniu nauki

- Wykład popularyzujący *Kwantowa Informacja i Teleportacja*, wygłoszony w III Liceum Ogólnokształcącym w Gdyni, marzec 2014.

7 Inne osiągnięcia naukowe

7.1 Dane bibliometryczne

Zródło: **Google Scholar** (14.12.2021)

- Liczba recenzowanych publikacji: 32 (20 po doktoracie)
- Liczba nieopublikowanych manuskryptów w bazie arXiv: 8
- Całkowita liczba cytowań: 601
- H-indeks: 14
- I10-indeks: 16

Zródło: **Web of Science** (14.12.2021)

- liczba recenzowanych publikacji: 32 (20 po doktoracie)
- Całkowita liczba cytowań: 373
- H-indeks: 10

7.2 Nagrody

- **Stypendium START** Fundacji na rzecz Nauki Polskiej (FNP) na rok 2016/2017.

7.3 Historia osiągnięć przed doktoratem

7.3.1 Badania uwzględnione w doktoracie:

- **Kwantowy zysk precyzji estymacji w obecności szumów.** Kiedy okazało się, że kwantowy zysk w precyzji estymacji nieznanymi parametrów znika w obecności szumu, włożono wiele pracy w przezwycięzenie tej trudności. Praca [O4] jest jedną z pierwszych publikacji poruszających ten problem. Zaproponowaliśmy protokół estymacji częstotliwości, który zapewnia ponadklasyczne skalowanie się precyzji estymacji pomimo obecności defazowania. Opiera się on na pomysłe dopasowania czasu estymacji do całkowitej liczby używanych cząstek. Praca [O4] okazała się istotną motywacją dla dalszych badań nad przezwyciężaniem wpływu dekoherencji na precyzję estymacji w kwantowej metrologii.
- **Kryteria detekcji splątania oparte o tensory korelacji.** W serii prac [O11, O16, O12] rozwinęliśmy podejście do detekcji wielocząstkowego splątania oparte o tensory korelacji stanów kwantowych. W pracy [O11] podaliśmy konieczny i wystarczający geometryczny warunek na wykluczenie częściowej separowalności. W [O16] podaliśmy warunek na detekcję wielocząstkowego splątania stanów czystych w oparciu jedynie o korelacje dwucząstkowe. Natomiast w [O12] podaliśmy kryterium splątania oparte na sumowaniu nieujemnych funkcji elementów tensora korelacji. Kryterium to przejawia szczególnie przyjazne eksperymentalnie własności.
- **Modele zmiennych ukrytych dla różnych poziomów korelacji.** W pracy [O13] pokazujemy, że w przypadku wielocząstkowych stanów kwantowych modele lokalnych zmiennych ukrytych mogą istnieć na poziomie korelacji pomiędzy ustaloną liczbą obserwatorów (mniejszą niż całkowita liczba podukładów), ale jednocześnie mogą one

nie być rozszerzalne do jednego globalnego modelu dla korelacji wszystkich rzędów. Zjawisko to można określić jako niekompatybilność modeli lokalnych zmiennych ukrytych dla różnych poziomów korelacji.

- **Kwantowe rozszerzenia modeli obliczeń rozproszonych opartych na synchronicznych rundach.** Lokalne modele grafowe oparte na synchronicznych rundach to modele obliczeń rozproszonych, w których wiele komputerów jest rozseparowanych przestrzennie i połączonych według pewnego grafu. Mają one za cel wspólne obliczenie pewnej globalnej funkcji zależnej od lokalnych wejść przy minimalnej liczbie synchronicznych rund, przy czym w każdej rundzie dopuszcza się *komunikację tylko z najbliższymi sąsiadami*. W tym modelu nie ma ograniczeń na lokalne moce obliczeniowe ani na ilość komunikacji wymienianej pomiędzy sąsiadami. W pracy [O7] wprowadziliśmy kwantowe rozszerzenia tego modelu obliczeń, zawierające współdzielenie stanów splątanych oraz obecność kwantowych kanałów komunikacji pomiędzy sąsiadującymi węzłami.

7.3.2 Badania nieuwzględnione w doktoracie:

- **Kwantowe przetwarzanie informacji na łańcuchach spinowych.** W serii prac [O21, O23, O22, O9] badaliśmy protokoły przetwarzania informacji implementowalne na liniowych łańcuchach spinowych. W pracy [O21] podaliśmy protokół dokładnego przesyłania stanów kwantowych przez łańcuch spinowy, który nie wymaga inicjalizacji stanu łańcucha ani komunikacji pomiędzy nadawcą a odbiorcą. W pracy [O22] badaliśmy wpływ różnych rodzajów szumów na przesyłanie stanów przez łańcuchy spinowe, natomiast w [O23] analizowaliśmy możliwość detekcji defektów w łańcuchach spinowych. Wreszcie w pracy [O9] badaliśmy łańcuchy stanów dwucząstkowych, z których żaden samodzielnie nie łamie nierówności Bella. Pokazaliśmy, że po dokonaniu pewnej ilości operacji wymiany splątania dochodzi do aktywacji nieklasyczości Bellowskiej, mianowicie w układzie pojawiają się korelacje łamiące nierówności Bella.
- **Ujednolicone spojrzenie na różne typy nieklasyczości.** W pracy [O15] podkreślamy rolę istnienia łącznego rozkładu prawdopodobieństwa jako cechę wspólną w rozumieniu klasyczości w różnych schematach eksperymentalnych: Bellowskim (korelacje przestrzenne), kontekstualnym (korelacje na jednym układzie mierzonym w różnych kontekstach), czy typu Leggetta-Garga (korelacje czasowe). Pokazujemy, jak przekształcać kontekstualne testy nieklasyczości na czasowe i przestrzenne. Za pomocą tej procedury konstruujemy nową rodzinę przestrzennych nierówności Bella. Pokazujemy również, że warunkiem koniecznym na nieklasyczość typu Leggetta-Garga jest łamanie warunków spójności w formalizmie konsystentnych historii.
- **Wielopunktowe kwantowe korelacje czasowe.** Przez długi czas wydawało się, że jedynie kwantowe korelacje przestrzenne mogą wykazywać charakter wielopunktowy, w przeciwieństwie do zawsze dwupunktowych korelacji czasowych. W pracy [O19] pokazaliśmy, że jest to błędny obraz. Skonstruowaliśmy procedurę przekształcania wielocząstkowych korelacji przestrzennych dla pewnych stanów kwantowych na wielopunktowe korelacje czasowe, odpowiadające sekwencyjnym pomiarom typu POVM (Positive Operator Value Measurements). Procedura ta pozwala na nowe architektury w obliczeniach kwantowych. Mianowicie obliczenia kwantowe oparte na pomiarach, które są typowo implementowalne na sieciach dwuwymiarowych, mogą

być zrealizowane na łańcuchach jednowymiarowych poddanych sekwencyjnym adaptynym pomiarom POVM.

7.4 Dodatkowy dorobek po doktoracie

Badania, które przeprowadziłem po uzyskaniu stopnia naukowego doktora, a które nie stanowią części osiągnięcia habilitacyjnego, można podzielić na następujące podpunkty:

- **Bezpieczna postselekcja w eksperymentach Bellowskich.** Postselekcja może mieć negatywny wpływ na testy nieklasyczności Bella, gdyż może ona wprowadzać nieprzyczynowe korelacje, których obecność może unieważnić test nieklasyczności. Jest to szczególnie ważny aspekt w eksperymentach optycznych, w których postselekcja jest bardzo często elementem przygotowania stanów splątanych. W pracy [O1] wprowadziliśmy warunek *wszyscy poza jednym* (all-but-one), który zapewnia bezpieczeństwo postselekcji dla wielocząstkowych testów nieklasyczności Bella. Dany schemat postselekcji spełnia ten warunek, jeśli może zostać zrealizowany z wyłączeniem jednego dowolnego obserwatora. Bezpieczeństwo takiej postselekcji jest oparte na tzw. regułach d -separowalności z dziedziny wnioskowania przyczynowego.
- **Kwantowe wielocząstkowe stany związane w modelu spacerów kwantowych.** Stany boromejskie to stany związane trzech lub więcej cząstek, które rozpadają się, o ile tylko jedna lub więcej cząstek będą usunięte z układu. Głównym wynikiem pracy [O14] jest demonstracja istnienia stanów boromejskich dla trzech i czterech cząstek w modelu spaceru kwantowego na jednowymiarowej sieci, w którym tzw. operator kwantowej monety jest uogólnionym operatorem Grovera. Znaczenie tego wyniku wiąże się z faktem, że dotychczas stany boromejskie pojawiały się jedynie w ramach fizyki jądrowej i atomowej, podczas gdy zaproponowana przez nas konstrukcja może stanowić prosty model do analizy oddziaływań prowadzących do powstawania stanów boromejskich.
- **Wieloparametrowa kwantowa metrologia.** Głównym wynikiem pracy [O17] jest dowód, że uogólniony trój- i cztero-modowy interferometr Macha-Zehndera może być wykorzystany do jednoczesnej estymacji odpowiednio dwóch i trzech faz (rozłożonych dowolnie pośród trzech lub czterech modów) z precyzją odpowiadającą granicy Heisenberga. Procedura estymacji zakłada całkowicie ustalony schemat interferometryczny, mianowicie ten sam stan początkowy oraz ten sam zestaw pomiarów może być użyty do estymacji dowolnego podzbioru nieznanymi faz (pozostała jedna faza służy jako referencja).
- **Skończone zbiory uśredniające dla uśredniania wielkości fizycznych względem niezwartych grup symetrii.** Projekt ten został w części zrealizowany poprzez publikację [O18], w której zaproponowaliśmy konstrukcję skończonych zbiorów uśredniających dla grupy $SL(2, \mathbb{C})$. Konstrukcja ta może być wykorzystana do skonstruowania skończonych zbiorów uśredniających dla uśredniania stanów wielu kubitów względem operacji typu SLOCC (Stochastic Local Operations and Classical Communication). Zbiory takie mogą być traktowane jako uogólnienie pojęcia unitarnych t -deseni (skończonych zbiorów uśredniających względem operacji unitarnych) na przypadek uśredniania po operacjach nieunitarnych. Konstrukcja ta oparta jest na formalizmie algebr Liego oraz uogólnionych kwadratur Gaussowskich.

- **Rewizja najnowszych paradoksów typu przyjaciela Wignera.** Głównym rezultatem pracy [O8] jest twierdzenie pokazujące nieistnienie wyników tzw. pre-pomiarów w teorii pomiaru kwantowego. Pre-pomiar to pierwsza faza procesu pomiarowego, w której układ mierzony ulega splątaniu ze stanami urządzenia pomiarowego. W naszej pracy [O8] pokazujemy, że nie można do takiego procesu przypisać jakiegokolwiek wyniku pomiaru, gdyż wówczas, zakładając prawdziwość przewidywań kwantowo-mechanicznych, otrzymujemy jawną sprzeczność. Ta własność unieważnia niedawne stwierdzenia o wewnętrznej sprzeczności kwantowomechanicznego opisu procesu pomiarowego z udziałem wielu obserwatorów, zaprezentowane w pracy: D. Frauchiger and R. Renner, Nat. Comm. **9**, 3711 (2018), oraz w pracach nią zainspirowanych.
- **Wielopunktowa koherencja a pomiary bez oddziaływania.** W pracy [O24] dyskutujemy relację pomiędzy istnieniem wielopunktowej koherencji a możliwością realizacji perfekcyjnych pomiarów bez oddziaływania. Podkreślamy, że mechanika kwantowa dopuszcza jedynie dwupunktową koherencję, co wiąże się z faktem, że każdy wieloszczelinowy eksperyment interferencyjny może być traktowany jako probabilistyczna mieszanina eksperymentów dwuszczelinowych. Pokazujemy, że ten fakt wyklucza możliwość realizacji perfekcyjnych pomiarów bez oddziaływania w ramach mechaniki kwantowej. Tym niemniej takie pomiary są możliwe w hipotetycznej teorii, która zawiera wielopunktową koherencję, jak np. teoria *sześcianów gęstości* (*density cubes theory*).
- **Losowy unitarny szum generowany przez losowe lokalne Hamiltoniany.** W pracy [O20] badamy wpływ losowego szumu unitarnego na wielocząstkowe stany kwantowe. Zakładamy, że szum ten jest generowany losowymi Hamiltonianami, co pozwala na charakteryzację odporności stanów na szum unitarny działający przez odpowiednio krótki czas. Okazuje się, że taka odporność jest jednoznacznie opisana za pomocą średniej Kwantowej Informacji Fishera danego stanu kwantowego. W uproszczeniu im mniejsza wartość średniej Informacji Fishera, tym bardziej dany stan jest odporny na losowy szum unitarny. Ponadto pokazaliśmy, że odporność ta bardzo słabo zależy od rozkładu prawdopodobieństwa losowych Hamiltonianów.
- **Nowa geometryczna reprezentacja trójpoziomowych układów kwantowych.** W pracy [O10] przedstawiamy trójwymiarową reprezentację stanów kubitowych przypominającą reprezentację kuli Blocha dla stanów kubitowych. Pokazujemy, że każdy taki stan może być reprezentowany jako trójwymiarowy wektor leżący wewnątrz elipsoidy o określonym kształcie i położeniu w przestrzeni.
- **Kwantowa redukcja złożoności komunikacyjnej a nieklasyczność Bella.** Kwantowa redukcja złożoności komunikacyjnej i nieklasyczność Bella to dwa różne przejawy nieklasyczności korelacji wyników pomiarów na układach kwantowych. Ich wzajemna relacja pozostawała przez długi czas niejasna. W pracy [O3] przedstawiamy istotny krok w kierunku zrozumienia tej relacji poprzez wykazanie, że każda statystyka, którą da się wydobyć z protokołów kwantowej komunikacji cechujących się odpowiednio dużą kwantową redukcją złożoności, prowadzi do złamania pewnej nierówności Bella. Dowód tej własności wykorzystuje tzw. wieloportową teleportację.
- **Nowa definicja nieklasyczności korelacji czasowych.** Pojęcie nieklasyczności w odniesieniu do korelacji czasowych powstających w wyniku sekwencyjnych pomiarów na pojedynczym układzie kwantowym jest niejednoznaczne i nie do końca dobrze określone fizycznie, w przeciwieństwie do przypadku korelacji przestrzennych

w scenariuszach Bellowskich. W pracy [O2] proponujemy nową definicję nieklasyczności korelacji czasowych zainspirowaną teorią złożoności komunikacyjnej. Definiujemy nieklasyczne korelacje czasowe jako takie, które nie mogą być zasymulowane za pomocą propagacji w czasie układu klasycznego o pojemności informacyjnej równej pojemności informacyjnej układu kwantowego w sensie Holevo. Podajemy przykład sekwencyjnych pomiarów typu POVM na pojedynczym kwantowym układzie m -poziomym, których statystyka nie może być zasymulowana za pomocą propagacji w czasie klasycznego układu m -poziomowego oraz wykorzystania komputerów z nieograniczoną pamięcią.

- **Relacja pomiędzy ograniczeniami na kwantowy zysk złożoności algorytmów kwantowych a ograniczeniami na precyzję estymacji parametrów w kwantowej metrologii.** W pracy [O6] wprowadziliśmy nowy sposób analizy efektywności kwantowych algorytmów przeszukiwania, zauważając analogię pomiędzy algorytmami typu Grovera a procedurami estymacji fazy w kwantowej metrologii. Przedstawiliśmy ogólną hipotezę, że klasa szumów, które uniemożliwiają kwantowy zysk w złożoności algorytmów przeszukiwania jest taka sama, jak klasa szumów, które uniemożliwiają ponadklasyczne skalowanie precyzji estymacji fazy.

Referencje: artykuły aplikanta zawarte w serii habilitacyjnej

- [H1] Paweł Blasiak, Ewa Borsuk, Marcin Markiewicz, and Yong-Su Kim. Efficient linear-optical generation of a multipartite W state. *Phys. Rev. A*, 104:023701, Aug 2021.
- [H2] Paweł Blasiak and Marcin Markiewicz. Entangling three qubits without ever touching. *Scientific Reports*, 9(1):20131, Dec 2019.
- [H3] Tamoghna Das, Marcin Karczewski, Antonio Mandarino, Marcin Markiewicz, Bianka Woloncewicz, and Marek Żukowski. Can single photon excitation of two spatially separated modes lead to a violation of Bell inequality via weak-field homodyne measurements? *New Journal of Physics*, 23(7):073042, Jul 2021.
- [H4] Marcin Karczewski, Marcin Markiewicz, Dagomir Kaszlikowski, and Paweł Kurzyński. Generalized probabilistic description of noninteracting identical particles. *Phys. Rev. Lett.*, 120:080401, Feb 2018.
- [H5] Wiesław Laskowski, Marcin Markiewicz, Danny Rosseau, Tim Byrnes, Kamil Kostrzewa, and Adrian Kołodziejski. Correlation-based entanglement criterion in bipartite multiboson systems. *Phys. Rev. A*, 92:022339, Aug 2015.
- [H6] Marcin Markiewicz, Dagomir Kaszlikowski, Paweł Kurzyński, and Antoni Wójcik. From contextuality of a single photon to realism of an electromagnetic wave. *npj Quantum Information*, 5(1):5, Jan 2019.
- [H7] Marcin Markiewicz, Adrian Kołodziejski, Zbigniew Puchała, Adam Rutkowski, Tomasz Tylec, and Wiesław Laskowski. Unified approach to geometric and positive-map-based nonlinear entanglement identifiers. *Phys. Rev. A*, 97:042339, Apr 2018.
- [H8] Marcin Markiewicz, Kamil Kostrzewa, Adrian Kołodziejski, Paweł Kurzyński, and Wiesław Laskowski. Investigating nonclassicality of many qutrits by symmetric two-qubit operators. *Phys. Rev. A*, 94:032119, Sep 2016.

- [H9] Hou Shun Poh, Marcin Markiewicz, Paweł Kurzyński, Alessandro Cerè, Dagomir Kaszlikowski, and Christian Kurtsiefer. Probing the quantum–classical boundary with compression software. *New Journal of Physics*, 18(3):035011, Mar 2016.

Referencje: artykuły aplikanta spoza serii

- [O1] Paweł Blasiak, Ewa Borsuk, and Marcin Markiewicz. On safe post-selection for Bell tests with ideal detectors: Causal diagram approach. *Quantum*, 5:575, November 2021.
- [O2] Stephen Brierley, Adrian Kosowski, Marcin Markiewicz, Tomasz Paterek, and Anna Przysiężna. Nonclassicality of temporal correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 115:120404, Sep 2015.
- [O3] Harry Buhrman, Łukasz Czekaj, Andrzej Grudka, Michał Horodecki, Paweł Horodecki, Marcin Markiewicz, Florian Speelman, and Sergii Strelchuk. Quantum communication complexity advantage implies violation of a Bell inequality. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(12):3191–3196, 2016.
- [O4] Rafael Chaves, Jonatan Bohr Brask, Marcin Markiewicz, Jan Kołodyński, and Antonio Acín. Noisy metrology beyond the standard quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, 111:120401, Sep 2013.
- [O5] Tamoghna Das, Marcin Karczewski, Antonio Mandarino, Marcin Markiewicz, Bianka Woloncewicz, and Marek Żukowski. On detecting violation of local realism with photon-number resolving weak-field homodyne measurements. *arXiv:2104.10703*, 2021.
- [O6] Rafał Demkowicz-Dobrzański and Marcin Markiewicz. Quantum computation speedup limits from quantum metrological precision bounds. *Phys. Rev. A*, 91:062322, Jun 2015.
- [O7] Cyril Gavoille, Adrian Kosowski, and Marcin Markiewicz. What can be observed locally? In Idit Keidar, editor, *Distributed Computing*, pages 243–257, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer Berlin Heidelberg.
- [O8] Marek Żukowski and Marcin Markiewicz. Physics and metaphysics of Wigner’s Friends: Even performed premeasurements have no results. *Phys. Rev. Lett.*, 126:130402, Apr 2021.
- [O9] Waldemar Kłobus, Wiesław Laskowski, Marcin Markiewicz, and Andrzej Grudka. Nonlocality activation in entanglement-swapping chains. *Phys. Rev. A*, 86:020302, Aug 2012.
- [O10] Paweł Kurzyński, Adrian Kołodziejski, Wiesław Laskowski, and Marcin Markiewicz. Three-dimensional visualization of a qutrit. *Phys. Rev. A*, 93:062126, Jun 2016.
- [O11] Wiesław Laskowski, Marcin Markiewicz, Tomasz Paterek, and Marek Żukowski. Correlation-tensor criteria for genuine multiqubit entanglement. *Phys. Rev. A*, 84:062305, Dec 2011.

- [O12] Wiesław Laskowski, Marcin Markiewicz, Tomasz Paterek, and Ryszard Weinar. Entanglement witnesses with variable number of local measurements. *Phys. Rev. A*, 88:022304, Aug 2013.
- [O13] Wiesław Laskowski, Marcin Markiewicz, Tomasz Paterek, and Marcin Wieśniak. Incompatible local hidden-variable models of quantum correlations. *Phys. Rev. A*, 86:032105, Sep 2012.
- [O14] Marcin Markiewicz, Marcin Karczewski, and Pawel Kurzynski. Borromean states in discrete-time quantum walks. *Quantum*, 5:523, August 2021.
- [O15] Marcin Markiewicz, Paweł Kurzyński, Jayne Thompson, Su-Yong Lee, Akihito Sodea, Tomasz Paterek, and Dagomir Kaszlikowski. Unified approach to contextuality, nonlocality, and temporal correlations. *Phys. Rev. A*, 89:042109, Apr 2014.
- [O16] Marcin Markiewicz, Wiesław Laskowski, Tomasz Paterek, and Marek Żukowski. Detecting genuine multipartite entanglement of pure states with bipartite correlations. *Phys. Rev. A*, 87:034301, Mar 2013.
- [O17] Marcin Markiewicz, Mahasweta Pandit, and Wiesław Laskowski. Simultaneous estimation of multiple phases in generalised Mach–Zehnder interferometer. *Scientific Reports*, 11(1):15669, Aug 2021.
- [O18] Marcin Markiewicz and Janusz Przewocki. On construction of finite averaging sets for $SL(2, \mathbb{C})$ via its Cartan decomposition. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(23):235302, May 2021.
- [O19] Marcin Markiewicz, Anna Przysiężna, Stephen Brierley, and Tomasz Paterek. Genuinely multipoint temporal quantum correlations and universal measurement-based quantum computing. *Phys. Rev. A*, 89:062319, Jun 2014.
- [O20] Marcin Markiewicz, Zbigniew Puchała, Anna de Rosier, Wiesław Laskowski, and Karol Życzkowski. Quantum noise generated by local random Hamiltonians. *Phys. Rev. A*, 95:032333, Mar 2017.
- [O21] Marcin Markiewicz and Marcin Wieśniak. Perfect state transfer without state initialization and remote collaboration. *Phys. Rev. A*, 79:054304, May 2009.
- [O22] Marcin Markiewicz and Marcin Wieśniak. One-qubit and two-qubit codes in noisy state transfer. *Open Systems & Information Dynamics*, 17(02):121–133, 2010.
- [O23] Marcin Wieśniak and Marcin Markiewicz. Finding traps in nonlinear spin arrays. *Phys. Rev. A*, 81:032340, Mar 2010.
- [O24] Zhuo Zhao, Spandan Mondal, Marcin Markiewicz, Adam Rutkowski, Borivoje Dakić, Wiesław Laskowski, and Tomasz Paterek. Paradoxical consequences of multipath coherence: Perfect interaction-free measurements. *Phys. Rev. A*, 98:022108, Aug 2018.

Referencje: pozostałe artykuły

- [E1] Ahmed Abdelrahman, Tetsuya Mukai, Hartmut Häffner, and Tim Byrnes. Coherent all-optical control of ultracold atoms arrays in permanent magnetic traps. *Opt. Express*, 22(3):3501–3513, Feb 2014.

- [E2] A. Acín, J. L. Chen, N. Gisin, D. Kaszlikowski, L. C. Kwek, C. H. Oh, and M. Żukowski. Coincidence Bell inequality for three three-dimensional systems. *Phys. Rev. Lett.*, 92:250404, Jun 2004.
- [E3] A. Acín, T. Durt, N. Gisin, and J. I. Latorre. Quantum nonlocality in two three-level systems. *Phys. Rev. A*, 65:052325, May 2002.
- [E4] Andrea Aiello, Falk Töppel, Christoph Marquardt, Elisabeth Giacobino, and Gerd Leuchs. Quantum-like nonseparable structures in optical beams. *New Journal of Physics*, 17(4):043024, Apr 2015.
- [E5] Elias Amselem, Magnus Rådmark, Mohamed Bourennane, and Adán Cabello. State-independent quantum contextuality with single photons. *Phys. Rev. Lett.*, 103:160405, Oct 2009.
- [E6] Piotr Badziąg, Caslav Brukner, Wiesław Laskowski, Tomasz Paterek, and Marek Żukowski. Experimentally friendly geometrical criteria for entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 100:140403, Apr 2008.
- [E7] F. Benatti, R. Floreanini, F. Franchini, and U. Marzolino. Entanglement in indistinguishable particle systems. *Physics Reports*, 878:1–27, 2020.
- [E8] Reinhold A Bertlmann and Philipp Krammer. Bloch vectors for qudits. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(23):235303, May 2008.
- [E9] Pawel Blasiak. Local model of a qubit in the interferometric setup. *New Journal of Physics*, 17(11):113043, Nov 2015.
- [E10] Pawel Blasiak. Is single-particle interference spooky? *arXiv:1701.02552 [quant-ph]*, 2017.
- [E11] Samuel L. Braunstein and Carlton M. Caves. Information-theoretic Bell inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 61:662–665, Aug 1988.
- [E12] Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani, and Stephanie Wehner. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, 86:419–478, Apr 2014.
- [E13] C. Budroni, A. Cabello, O. Gühne, M. Kleinmann, and J.-A. Larsson. Quantum contextuality. *arXiv:2102.13036 [quant-ph]*, 2021.
- [E14] Tim Byrnes. Fractality and macroscopic entanglement in two-component Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 88:023609, Aug 2013.
- [E15] Adán Cabello, Simone Severini, and Andreas Winter. (Non-)Contextuality of physical theories as an axiom. *arXiv:1010.2163 [quant-ph]*, 2010.
- [E16] Adán Cabello, Simone Severini, and Andreas Winter. Graph-theoretic approach to quantum correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 112:040401, Jan 2014.
- [E17] Richard A. Campos. Three-photon Hong-Ou-Mandel interference at a multiport mixer. *Phys. Rev. A*, 62:013809, Jun 2000.
- [E18] N. J. Cerf and C. Adami. Entropic Bell inequalities. *Phys. Rev. A*, 55:3371–3374, May 1997.

- [E19] Giulio Chiribella, Giacomo Mauro D’Ariano, and Paolo Perinotti. Informational derivation of quantum theory. *Phys. Rev. A*, 84:012311, Jul 2011.
- [E20] Man-Duen Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 10(3):285–290, 1975.
- [E21] R. Cilibrasi and P.M.B. Vitanyi. Clustering by compression. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(4):1523–1545, 2005.
- [E22] John F. Clauser and Michael A. Horne. Experimental consequences of objective local theories. *Phys. Rev. D*, 10:526–535, Jul 1974.
- [E23] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, Oct 1969.
- [E24] Daniel Collins, Nicolas Gisin, Noah Linden, Serge Massar, and Sandu Popescu. Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems. *Phys. Rev. Lett.*, 88:040404, Jan 2002.
- [E25] Gonzalo de la Torre, Lluís Masanes, Anthony J. Short, and Markus P. Müller. Deriving quantum theory from its local structure and reversibility. *Phys. Rev. Lett.*, 109:090403, Aug 2012.
- [E26] Rafal Demkowicz-Dobrzański, Marcin Jarzyna, and Jan Kołodyński. Quantum limits in optical interferometry. 60:345 – 435, 2015.
- [E27] E. A. Fonseca and Fernando Parisio. Measure of nonlocality which is maximal for maximally entangled qutrits. *Phys. Rev. A*, 92:030101, Sep 2015.
- [E28] Diego Frustaglia, José P. Baltanás, María C. Velázquez-Ahumada, Armando Fernández-Prieto, Aintzane Lujambio, Vicente Losada, Manuel J. Freire, and Adán Cabello. Classical physics and the bounds of quantum correlations. *Phys. Rev. Lett.*, 116:250404, Jun 2016.
- [E29] Lucien Hardy. Nonlocality of a single photon revisited. *Phys. Rev. Lett.*, 73:2279–2283, Oct 1994.
- [E30] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2044–2046, Nov 1987.
- [E31] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223(1):1–8, 1996.
- [E32] Ryszard Horodecki and Michał Horodecki. Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states. *Phys. Rev. A*, 54:1838–1843, Sep 1996.
- [E33] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 81:865–942, Jun 2009.
- [E34] Mark Howard, Joel Wallman, Victor Veitch, and Joseph Emerson. Contextuality supplies the ‘magic’ for quantum computation. *Nature*, 510(7505):351–355, Jun 2014.

- [E35] Mahmood Irtiza Hussain, Ebubechukwu O. Ilo-Okeke, and Tim Byrnes. Geometric phase gate for entangling two Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 89:053607, May 2014.
- [E36] M. Żukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, and A. K. Ekert. “Event-ready-detectors” Bell experiment via entanglement swapping. *Phys. Rev. Lett.*, 71:4287–4290, Dec 1993.
- [E37] Marek Żukowski. Violations of local realism in multiphoton interference experiments. *Phys. Rev. A*, 61:022109, Jan 2000.
- [E38] Marek Żukowski, Wiesław Laskowski, and Marcin Wieśniak. Normalized Stokes operators for polarization correlations of entangled optical fields. *Phys. Rev. A*, 95:042113, Apr 2017.
- [E39] Marek Żukowski, Marcin Wieśniak, and Wiesław Laskowski. Bell inequalities for quantum optical fields. *Phys. Rev. A*, 94:020102, Aug 2016.
- [E40] A. Jamiołkowski. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):275–278, 1972.
- [E41] Richard Jozsa and Noah Linden. On the role of entanglement in quantum-computational speed-up. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2036):2011–2032, 2003.
- [E42] Yong-Su Kim, Young-Wook Cho, Hyang-Tag Lim, and Sang-Wook Han. Efficient linear optical generation of a multipartite W state via a quantum eraser. *Phys. Rev. A*, 101:022337, Feb 2020.
- [E43] Hadrien Kurkjian, Krzysztof Pawłowski, Alice Sinatra, and Philipp Treutlein. Spin squeezing and Einstein-Podolsky-Rosen entanglement of two bimodal condensates in state-dependent potentials. *Phys. Rev. A*, 88:043605, Oct 2013.
- [E44] Paweł Kurzyński. Contextuality of identical particles. *Phys. Rev. A*, 95:012133, Jan 2017.
- [E45] Paweł Kurzyński and Dagomir Kaszlikowski. Information-theoretic metric as a tool to investigate nonclassical correlations. *Phys. Rev. A*, 89:012103, Jan 2014.
- [E46] Ming Li, Xin Chen, Xin Li, Bin Ma, and P.M.B. Vitanyi. The similarity metric. *IEEE Transactions on Information Theory*, 50(12):3250–3264, 2004.
- [E47] Xiongfeng Ma, Xiao Yuan, Zhu Cao, Bing Qi, and Zhen Zhang. Quantum random number generation. *npj Quantum Information*, 2(1):16021, Jun 2016.
- [E48] Ll Masanes. Tight Bell inequality for d -outcome measurements correlations. *Quantum Info. Comput.*, 3(4):345–358, July 2003.
- [E49] Lluís Masanes and Markus P Müller. A derivation of quantum theory from physical requirements. *New Journal of Physics*, 13(6):063001, Jun 2011.
- [E50] N. David Mermin. Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states. *Phys. Rev. Lett.*, 65:1838–1840, Oct 1990.

- [E51] Jian-Wei Pan, Zeng-Bing Chen, Chao-Yang Lu, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, and Marek Żukowski. Multiphoton entanglement and interferometry. *Rev. Mod. Phys.*, 84:777–838, May 2012.
- [E52] T Paterrek, P Kurzyński, D K L Oi, and D Kaszlikowski. Reference frames for Bell inequality violation in the presence of superselection rules. *New Journal of Physics*, 13(4):043027, Apr 2011.
- [E53] Asher Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1413–1415, Aug 1996.
- [E54] S. Pirandola, U. L. Andersen, L. Banchi, M. Berta, D. Bunandar, R. Colbeck, D. Englund, T. Gehring, C. Lupo, C. Ottaviani, J. L. Pereira, M. Razavi, J. Shamsul Shaari, M. Tomamichel, V. C. Usenko, G. Vallone, P. Villoresi, and P. Wallden. Advances in quantum cryptography. *Adv. Opt. Photon.*, 12(4):1012–1236, Dec 2020.
- [E55] Sandu Popescu, Lucien Hardy, and Marek Żukowski. Revisiting Bell’s theorem for a class of down-conversion experiments. *Phys. Rev. A*, 56:R4353–R4356, Dec 1997.
- [E56] Alexey N Pyrkov and Tim Byrnes. Entanglement generation in quantum networks of Bose–Einstein condensates. *New Journal of Physics*, 15(9):093019, Sep 2013.
- [E57] Xiao-Feng Qian and J. H. Eberly. Entanglement and classical polarization states. *Opt. Lett.*, 36(20):4110–4112, Oct 2011.
- [E58] Michael Reck, Anton Zeilinger, Herbert J. Bernstein, and Philip Bertani. Experimental realization of any discrete unitary operator. *Phys. Rev. Lett.*, 73:58–61, Jul 1994.
- [E59] M. D. Reid and D. F. Walls. Violations of classical inequalities in quantum optics. *Phys. Rev. A*, 34:1260–1276, Aug 1986.
- [E60] B. W. Schumacher. Information and quantum nonseparability. *Phys. Rev. A*, 44:7047–7052, Dec 1991.
- [E61] Fabio Sciarrino, Giuseppe Vallone, Adán Cabello, and Paolo Mataloni. Bell experiments with random destination sources. *Phys. Rev. A*, 83:032112, Mar 2011.
- [E62] Christoph Simon and Dik Bouwmeester. Theory of an entanglement laser. *Phys. Rev. Lett.*, 91:053601, Aug 2003.
- [E63] Łukasz Skowronek. There is no direct generalization of positive partial transpose criterion to the three-by-three case. *Journal of Mathematical Physics*, 57(11):112201, 2016.
- [E64] Christoph Spengler, Marcus Huber, and Beatrix C Hiesmayr. A geometric comparison of entanglement and quantum nonlocality in discrete systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(6):065304, Jan 2011.
- [E65] Robert J. C. Spreeuw. A classical analogy of entanglement. *Foundations of Physics*, 28(3):361–374, Mar 1998.
- [E66] Robert J. C. Spreeuw. Classical wave-optics analogy of quantum-information processing. *Phys. Rev. A*, 63:062302, May 2001.

- [E67] S. M. Tan, D. F. Walls, and M. J. Collett. Nonlocality of a single photon. *Phys. Rev. Lett.*, 66:252–255, Jan 1991.
- [E68] Barbara M. Terhal. Bell inequalities and the separability criterion. *Physics Letters A*, 271(5):319–326, 2000.
- [E69] Philipp Treutlein, Theodor W. Hänsch, Jakob Reichel, Antonio Negretti, Markus A. Cirone, and Tommaso Calarco. Microwave potentials and optimal control for robust quantum gates on an atom chip. *Phys. Rev. A*, 74:022312, Aug 2006.
- [E70] Marek Wajs, Paweł Kurzyński, and Dagomir Kaszlikowski. Information-theoretic Bell inequalities based on Tsallis entropy. *Phys. Rev. A*, 91:012114, Jan 2015.
- [E71] Daniel F Walls and Gerard J Milburn. *Quantum optics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [E72] B. Yurke and D. Stoler. Bell's-inequality experiments using independent-particle sources. *Phys. Rev. A*, 46:2229–2234, 1992.
- [E73] B. Yurke and D. Stoler. Einstein-Podolsky-Rosen Effects from Independent Particle Sources. *Phys. Rev. Lett.*, 68:1251–1254, 1992.

Marin Markiewicz