# Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Gabrieli Łuczyńskiej pt. "Ergodyczność oraz twierdzenia graniczne dla stochastycznych układów dynamicznych na okręgu"

Rozprawa doktorska składa się z czterech rozdziałów. Przedmiotem rozprawy jest badanie granicznego zachowania się układów dynamicznych na okręgu generowanych przez półgrupę topologiczną $G$ homemomorfizmów okręgu z wyznaczoną miarą probabilistyczną $\nu$ na $G$. Taki proces generuje proces Markowa na okręgu. Zakłada się, że operator prawdopodobieństw przejścia odpowiadający temu procesowi jest fellerowski to znaczy przeprowadza funkcje ograniczone i ciągłe w siebie. Jeżeli półgrupa $G^{-1}$ działa minimalnie to znaczy dla $\nu$ prawie wszystkich homemorfizmów z $G$, zbiory niezmiennicze mają cały okrąg jako domknięcie, to wspomniany wyżej proces Markowa spełnia tkz. e-własność polegającą na tym, że iteracje operatorów przejścia na funkcjach lipschitzowskich są jednakowo ciągłe w każdym punkcie i w konsekwencji proces Markowa ma jedyną miarę niezmienniczą. Gdy zaś półgrupa $G$ działa minimalnie to też proces Markowa ma jedyną miarę niezmienniczą. Oba zacytowane powyżej twierdzenia stanowią główny wynik pracy, opublikowany w pozycji [29] (aczkolwiek przy specjalnej strukturze miary $\nu$, w rozprawie miara $\nu$ jest dowolna). Dowód pierwsze twierdzenia 3.3 podoba mi się bo zawiera kilka nieoczekiwanych przejść. Drugie twierdzenie 3.4 też zasługuje na uwagę, ale było dla mnie mniej zaskakujące. Oba twierdzenia stanowią kluczową część rozdziału 3, który jest uzupełniony przykładem ich zastosowania asymptotycznej stabilności do tkz. iterowanego układu funkcyjnego z wykorzystaniem bardzo ładnego twierdzenia Lasoty-Yorke'a z 1994 roku. W zasadzie jedyną uwagę w tym rozdziale mam do danych historycznych. Mianowicie e-własność nie została wprowadzona w pracach [23] i [27]. Była ona znana już wcześniej. Pojawiła się ona już w pracach [1] i [2], a więc ponad 40 lat wcześniej.

Rozdział czwarty rozprawy zawiera wyniki z pracy [30]. Pokazane są w nim kolejno centralne twierdzenie graniczne i prawo iterowanego logarytmu dla scentrowanych funkcji lipschitzowskich od wspomnianego wyżej procesu Markowa nazywanego identyfikowanego teraz ze spacerem losowym na półgrupie $G$, przy założeniu, że nie ma miary niezmienniczej dla każdego elementu z $G$. Oba fakty opierają się na innych wynikach z literatury. Do centralnego twierdzenia granicznego potrzebujemy twierdzenia Maliceta z 2017 roku i ogólnego twierdzenia Derrienica-Lina z 2003 roku. Kluczowy tutaj okazuje się Lemat 4.5 pokazujący jednostajną ograniczość różnic sum iteracji prawdopodobieństw przejścia z dowolnych dwóch punktów startu procesu. Ten ostatni wynik też stał się ważny przy dowodzie prawa iterowanego algorytmu w oparciu z kolei o twierdzenie Zhao-Woodroofe'a z 2008 roku. Rozdział czwarty jest zakończony przykładem zastosowania udowodnionych twierdzeń. Jedyna moja uwaga do tego rozdziału dotyczy Twierdzenia 4.6 w którym zapomniano założyć, że $\phi$ jest scentrowane względem miary niezmienniczej $\mu_*$ procesu Markowa, tzn. $\mu_*(\phi) = 0$.

Rozprawę doktorską czyta się dobrze. Bardzo pomocny jest rozdział drugi w którym są wprowadzone i czasami dowiedzione podstawowe własności fellerowskich operatorów prawdopodobieństw przejścia. Rozdział czwarty wymagał od autorki dogłębnego poznania szeregu istotnych prac z tematyki i to ukierunkowanie jest w dużym stopniu zasługą promotora.

Reasumując, jest to bardzo ładna i poprawna praca doktorska. Doktorantka zdobyła istotną wiedzę i dość dobrze umie ją wykorzystywać. Dlatego też uważam, że rozprawa doktorska spełnia wszelkie ustawowe wymagania i wnioskuję o dopuszczenie doktorantki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Łukasz Stettner                                        Warszawa, 15 sierpnia 2022

**References**


[1] B. Jamison, Asymptotic behavior of successive iterates of continuous functions under a Markov operator. J. Math. Anal. Appl. 9 (1964), 203–214.

[2] M. Rosenblatt, Equicontinuous Markov Operators, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 9 (1964), 205–222.