Uniwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i informatyki

Gabriela Łuczyńska

Ergodyczność oraz twierdzenia graniczne dla stochastycznych układów dynamicznych na okręgu

Praca doktorska napisana pod kierunkiem:
prof. dr. hab. inż. Tomasza Szarka

Gdańsk 2022

Gabriela Łuczyńska
Wydział Matematyki, Fizyki i informatyki
Uniwersytet Gdański

Oświadczenie

Ja, niżej podpisana oświadczam, iż przedłożona praca doktorska została wykonana przeze mnie samodzielnie, nie narusza praw autorskich, interesów prawnych i materialnych innych osób.

Wyrażam zgodę na korzystanie z mojej pracy dyplomowej zatytułowanej "Ergodyczność oraz twierdzenia graniczne dla stochastycznych układów dynamicznych na okręgu" do celów naukowych lub dydaktycznych.

Wyrażam zgodę na wyłożenie mojej rozprawy doktorskiej w Bazie Wiedzy Uniwersytetu Gdańskiego przed obroną rozprawy.

Oświadczam, że wersja papierowa mojej rozprawy doktorskiej jest zgodna z wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia ....

podpis doktoranta

Podziękowania

Niniejsza rozprawa jest wynikiem nie tylko mojej pracy, ale także wsparcia, które otrzymałam po drodze od wielu osób. Nie sposób wymienić wszystkich bezpośrednio, a słowa i tak pozostaną niewystarczające, dlatego podziękuję symbolicznie.

Serdecznie dziękuję wszystkim, którzy wspierali mnie na drodze nauki prowadzącej do powstania niniejszej pracy, od początków, w których uczyłam się liczyć, przez szkolne konkursy i olimpiady pełne emocji, aż do studiowania matematyki wyższej.

Dziękuję mojej rodzinie i przyjaciołom za każde dobre słowo, za dumę z powodu moich osiągnięć, a także za wiarę, że mi się uda mimo napotykanych trudności.

Dziękuję moim nauczycielom, z każdego etapu nauki, za cierpliwość, okazaną pomoc i zachęcanie do szerszego zgłębiania interesujących mnie zagadnień.

Dziękuję pracownikom i studentom Politechniki Gdańskiej, na której miałam przyjemność ukończyć studia licencjackie i magisterskie. Dociekliwe pytania moich koleżanek i kolegów pomagały mi dostrzec najdrobniejsze zależności w przerabianych tematach, a opieka i zaangażowanie kadry akademickiej stale inspirowały mnie do poszerzania wiedzy, co zaowocowało rozpoczęciem studiów doktoranckich.

Dziękuję pracownikom i studentom Uniwersytetu Gdańskiego, a także moim współpracownikom i pracodawcom. Bez ich wsparcia i elastycznego podejścia, łączenie studiów doktoranckich oraz pracy zawodowej byłoby dużo trudniejsze.

Na koniec pragnę podziękować mojemu promotorowi, Profesorowi Tomaszowi Szarkowi, z którym możliwość współpracy jest dla mnie niezwykle cenna i wartościowa. Dziękuję za wiarę w moje możliwości, za wyrozumiałość, za spojrzenie na świat i za jakże nieocenioną pomoc naukową. Dzięki temu przygotowywanie niniejszej rozprawy było dla mnie piękną przygodą, a także drogą do bycia kimś lepszym.

Streszczenie

W pracy badane są własności stochastycznego układu dynamicznego złożonego z losowych homeomorfizmów okręgu. Głównym założeniem jest własność minimalności działania takiego układu (z której wynika gęstość orbit). Ponadto układ ten generuje operator Fellera, a także spacer losowy po okręgu. Dla danego operatora Fellera pokazana została jednoznaczność miary niezmienniczej (ergodycznej). Ponadto dla łańcucha Markowa odpowiadającego danemu spacerowi losowemu po okręgu dowiedzione zostały: centralne twierdzenie graniczne oraz prawo iterowanego logarytmu. Twierdzenia te zachodzą dla dowolnej scentrowanej funkcji lipschitzowskiej i dla każdego punktu startowego łańcucha Markowa.

Rozdział pierwszy wprowadza główne obiekty oraz twierdzenia, które są przedmiotem badań w dalszej części pracy.

W rozdziale drugim przedstawione są własności stochastycznych układów dynamicznych na ogólnych przestrzeniach polskich lub zwartych, w tym własności dotyczące operatorów Markowa-Fellera oraz istnienia miary niezmienniczej.

Rozdział trzeci poświęcony jest istnieniu jedynej miary niezmienniczej dla operatora Fellera generowanego przez stochastyczny układ dynamiczny złożony z losowych homeomorfizmów okręgu, przy założeniu minimalności działania układu. W dowodzie wykorzystana została e-własność. Przedstawione są także przykłady zastosowania głównego twierdzenia oraz warunki wystarczającego na to, aby rozważany operator Fellera był asymptotycznie stabilny.

Rozdział czwarty zawiera dowody centralnego twierdzenia granicznego oraz prawa iterowanego logarytmu dla łańcucha Markowa odpowiadającego spacerowi losowemu generowanemu przez stochastyczny układ dynamiczny złożony z losowych homeomorfizmów okręgu, przy założeniu minimalności działania układu. Oba twierdzenia zastały wykazane dla dowolnej scentrowanej funkcji lipschitzowskiej i dla każdego punktu startowego łańcucha Markowa. W dowodzie centralnego twierdzenia granicznego wykorzystane zostały wyniki Y. Derrienica i M. Lina, a w dowodzie prawa iterowanego logarytmu — wyniki O. Zhao i M. Woodroofe'a. W rozdziale przedstawiony został także przykład zastosowania dowiedzionych twierdzeń granicznych.

Słowa kluczowe: Stochastyczne układy dynamiczne, operatory Markowa-Fellera, miary niezmiennicze, e-własność, spacery losowe, centralne twierdzenie graniczne, prawo iterowanego logarytmu.

Matematyczna Klasyfikacja Przedmiotowa (MSC): 37A25, 37A30, 60F05, 60J05, 60J25, 76N10.

Abstract

In the paper, the properties of stochastic dynamical system consisting of random circle homeomorphisms are studied. The main assumption is that the system acts minimally (which implicates that its orbits are dense). Moreover, this system generates Feller operator as well as random walk on the circle. For the Feller operator, the existence of unique (ergodic) invariant measure has been shown. Furthermore, for Markov chain corresponding to the random walk on the circle, the central limit theorem and the law of iterated logarithm have been proven. These theorems are satisfied for arbitrary centered Lipschitz function and for every starting point of the Markov chain.

The first chapter introduces the main objects and theorems which are the subject of the research in further parts of the work.

In second chapter, the properties of stochastic dynamical systems on general polish or convex spaces are presented, including the properties of Markov-Feller operators and the existence of invariant measure.

The third chapter is devoted to the existence of unique invariant measure for the Feller operator generated by stochastic dynamical system consisting of random circle homeomorphisms and acting minimally. The e-property is used in the proof. Also, the examples of application of the main theorem as well as the sufficient conditions for the Feller operator to be asymptotically stable are presented.

The fourth chapter includes the proofs of the central limit theorem and the law of the iterated logarithm for Markov chain corresponding to the random walk generated by stochastic dynamical system consisting of random circle homeomorphisms and acting minimally. Both theorems are proved for arbitrary centered Lipschitz function and for every starting point of the Markov chain. In the proof of the central limit theorem, the results of Y. Derrienic and M. Lin were used, and in the proof of the law of the iterated logarithm, the results of O. Zhao and M. Woodroofe were applied. In this chapter, the example of application proven limit theorems is also presented.

Keywords: Stochastic dynamical systems, Markov-Feller operators, invariant measures, e-property, random walks, central limit theorem, law of the iterated logarithm.

Mathematics Subject Classification: 37A25, 37A30, 60F05, 60J05, 60J25, 76N10.

Spis treści

Rozdział 1

Wprowadzenie

Praca jest poświęcona własnościom stochastycznych układów dynamicznych na okręgu. Do badania tych własności można wykorzystać operatory Markowa, działające na miarach skończonych. Dla takich operatorów często stawia się pytanie o istnienie miar niezmienniczych, które są głównym przedmiotem badań teorii ergodycznej. Przy naszych założeniach samo istnienie miary niezmienniczej jest zapewnione, ponieważ działamy na przestrzeni zwartej, a rozpatrywany operator Markowa jest jednocześnie operatorem Fellera. Wyzwaniem, przed którym stoimy, jest natomiast wykazanie jedyności miary niezmiennicznej i przedstawiamy to przy minimalnych założeniach. Ponadto w pracy zbadamy twierdzenia graniczne dla łańcucha Markowa generowanego przez spacer losowy, odpowiadający zadanemu stochastycznemu układowi dynamicznemu. W tym przypadku przedstawimy dowód centralnego twierdzenia granicznego i prawa iterowanego logarytmu nie tylko dla stacjonarnego łańcucha Markowa, ale także dla łańcucha Markowa startującego z dowolnego punktu na okręgu.

Własności układów dynamicznych są szeroko badane na różnych przestrzeniach. W pracy zajmujemy się układami generowanymi przez losowe homeomorfizmy okręgu. Kluczowym założeniem jest własność minimalności działania takiego układu (implikującej gęstość orbit). W dowodzie istnienia jedynej miary niezmienniczej korzystamy z e-własności oraz jej zmodyfikowanej wersji, powstałej na potrzeby tych badań. Dowodząc twierdzeń granicznych, wykorzystujemy wyniki Y. Derrienica oraz M. Lina, a także O. Zhao oraz M. Woodroofe'a.

1.1 Stochastyczne układy dynamiczne

Układy dynamiczne mogą podlegać losowym zaburzeniom, wynikającym na przykład z czynników zewnętrznych lub ze zmienności ich parametrów. Mimo występowania zaburzeń, rozwój takich układów nadal może być na pewnym poziomie przewidywalny. Badaniem statystycznych własności układów dynamicznych zajmuje się teoria ergodyczna. Odkrycia dokonywane w tym obszarze mają znaczenie nie tylko w matematyce, ale także w dziedzinach nauki takich jak fizyka, biologia czy chemia (zobacz np. [26]).

Teorię stochastycznych układów dynamicznych możemy określić jako badającą niezależne losowe kompozycje transformacji danej przestrzeni. Jednym z podstawowych modeli ilustrujących to zjawisko jest tak zwany iterowany układ funkcyjny (z prawdopodobieństwem). Składa się on z rodziny odwzorowań danej przestrzeni oraz przyporządkowanych im prawdopodobieństw. Ewolucja rozkładu zmieniającego się w kolejnych krokach następuje w wyniku losowego wyboru przekształceń. Teoria iterowanych układów funkcyjnych na ogół zajmuje się własnościami działań generowanych przez skończone rodziny transformacji. W pracy nie ograniczamy się do tego założenia. Zbiór generatorów będzie mógł być nieskończony, w tym także nieprzeliczalny.

Rozwój w czasie stochastycznego układu dynamicznego można opisać za pomocą procesu stochastycznego. Jednym ze znanych modeli jest proces Markowa, opisujący układ, w którym dany stan zależy tylko od stanu bezpośrednio go poprzedzającego, a nie zależy natomiast od stanów wcześniejszych. Naturalne wydaje się pytanie o stabilność takiego układu, czyli o to, czy niezależnie od rozkładu początkowego rozkład procesu stochastycznego zbiega wraz z upływem czasu do tej samej miary (stacjonarnej).

Przyjrzyjmy się bliżej zjawisku badanemu w pracy. Niech $(G, \circ)$ będzie topologiczną półgrupą o elementach z grupy odwzorowań pewnej przestrzeni zwartej S, w której istnieje porządek. Zbiór generatorów półgrupy G może być nieskończony, w tym nieprzeliczalny. Niech dana będzie pewna miara probabilistyczna ν na G. Trójkę (S, G, ν) nazywać będziemy *stochastycznym układem dynamicznym.* Układ ten generuje lewostronny spacer losowy po S. Przez taki spacer rozumiemy losowy ciąg $\omega \mapsto (g^n_\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów G zdefiniowany na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathbb{P}) = (G^\mathbb{N}, \nu^{\otimes\mathbb{N}})$ następująco: dla $\omega = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ oraz $n \in \mathbb{N}$

$$g^n_\omega := g_n \circ \cdots \circ g_1.$$

Zwieńczeniem pracy jest dowiedzenie centralnego twierdzenia granicznego oraz prawa iterowanego logarytmu (oba twierdzenia dla procesu startującego z punktu) dla łańcucha Markowa odpowiadającego zadanemu spacerowi losowemu, generowanemu przez stochastyczny układ dynamiczny (S^1, G, ν), gdzie G jest półgrupą homeomorfizmów okręgu.

1.2 Twierdzenia graniczne

Istotnym zagadnieniem dotyczącym procesów stochastycznych są własności ich rozkładów granicznych. Do najsłynniejszych twierdzeń w tej dziedzinie należą centralne twierdzenie graniczne oraz prawa wielkich liczb, a także prawo iterowanego logarytmu. Centralne twierdzenie graniczne określa warunki, w których rozkład odpowiednio unormowanej sumy niezależnych zmiennych losowych zbiega słabo do rozkładu normalnego. Twierdzenie to jest istotne, ponieważ wynika z niego, że metody statystyczne oraz teorii prawdopodobieństwa, mające zastosowanie wobec zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, mogą być także wykorzystane w przypadkach innych typów rozkładów.

Przed podaniem twierdzenia przypomnimy, czym jest słaba zbieżność miar.

Definicja 1.1. Niech $(S, \mathcal{B}(S))$ będzie metryczną przestrzenią mierzalną, gdzie $\mathcal{B}(S)$ jest σ-algebrą zbiorów borelowskich. Mówimy, że ciąg dodatnich miar probabilistycznych $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ na przestrzeni $(S, \mathcal{B}(S))$ *zbiega słabo* lub *według rozkładu* do dodatniej miary probabilistycznej μ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej ograniczonej, ciągłej funkcji $f : S \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_S f \mathrm{d}\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_S f \mathrm{d}\mu.$$

Uwaga 1.2. Jest wiele sposobów metryzowania słabej zbieżności. Jednym z nich jest użycie metryki Wassersteina d_W zdefiniowanej następująco. Niech (S, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną. Dla dowolnych miar μ_1, μ_2 ograniczonych na S

$$\mathrm{d}_W(\mu_1, \mu_2) := \sup_{\varphi} \left\{ \left| \int_S \varphi \mathrm{d}\mu_1 - \int_S \varphi \mathrm{d}\mu_2 \right| \right\},$$

gdzie supremum jest rozważane po wszystkich funkcjach lipschitzowskich na S o stałej Lipschitza mniejszej lub równej 1. Metryka Wassersteina zależy więc od metryki d. Mimo tego zbieżność w słabej topologii jest równoważna zbieżności w metryce Wassersteina.

Więcej na temat metryk w kontekście stabilności układu można przeczytać w książce [34], której autorem jest bułgarski matematyk Svetlozar Rachev.

Jednym z głównych zagadnień naszej pracy jest centralne twierdzenie graniczne. W swej pierwotnej wersji zostało ono sformułowane dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, $X_1, X_2, \ldots$. Jeżeli rozkład tych zmiennych ma wartość oczekiwaną m oraz skończoną wariancję σ^2, to rozkład zmiennej losowej $\sum_{k=1}^{n} (X_k - m)/\sqrt{n}$ przy $n \to \infty$ zbiega słabo do $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, czyli do rozkładu normalnego o średniej 0 oraz wariancji σ^2.

Przytoczyliśmy wersję centralnego twierdzenia granicznego dla zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Wariantów tego twierdzenia powstało jednak wiele. W przypadku centralnego twierdzenia granicznego dla łańcuchów Markowa, możemy sprowadzić je do poszukiwań granicy

$$\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mu_*}\left[\frac{\varphi(X_1)+\cdots+\varphi(X_n)}{\sqrt{n}}\right]^2,$$

gdzie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest łańcuchem Markowa odpowiadającym stochastycznemu układowi dynamicznemu (S, G, ν), a φ jest dowolną funkcją Lipschitza scentrowaną względem miary niezmienniczej μ_* dla operatora Markowa P odpowiadającego (S, G, ν). Wtedy zachodzi słaba zbieżność

$$\frac{\varphi(X_1)+\cdots+\varphi(X_n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{słabo}} \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

Możemy zauważyć, że powyższa zależność jest podobna do pierwotnej wersji centralnego twierdzenia granicznego, lecz dotyczy nie tylko dowolnego łańcucha Markowa, ale ponadto przetransponowanego przez funkcję φ, tak zwaną obserwablę.

Mówiąc o twierdzeniach granicznych, trudno nie wspomnieć o mocnym prawie wielkich liczb. Zachodzi ono, gdy scentrowany i uśredniony ciąg zmiennych losowych zbiega do zera z prawdopodobieństwem 1. W pracy nie przedstawiamy dowodu mocnego prawa wielkich liczb, ponieważ przy naszych założeniach jest to prosta konsekwencja znanych twierdzeń (zobacz na przykład [6]).

Kolejnym twierdzeniem granicznym, które wykażemy, jest prawo iterowanego logarytmu. Opisuje ono rozmiar fluktuacji spaceru losowego. Podczas gdy prawa wielkich liczb mówią o zbieżności średniej określonych zmiennych losowych do zera (zarówno prawie wszędzie, jak i z prawdopodobieństwem 1), zaś centralne twierdzenie graniczne traktuje o sumie zmiennych losowych, skalowanej przez $n^{-1/2}$, której rozkład zbiega do rozkładu normalnego (a tym samym górna granica skalowanej sumy zmiennych losowych zbiega do nieskończoności), prawo iterowanego logarytmu podaje warunki zbieżności sumy zmiennych losowych prawie na pewno do 1. Uzyskujemy to za pomocą skalowania przez $\left(\sigma\sqrt{2n\log\log n}\right)^{-1}$. Dzięki temu prawo iterowanego logarytmu rozróżnia zbieżność prawie wszędzie i zbieżność z prawdopodobieństwem 1, czego nie widzi mocne prawo wielkich liczb.

W swej pierwotnej wersji prawo iterowanego logarytmu dotyczy ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, $X_1, X_2, \ldots$. Jeśli ten rozkład posiada wartość oczekiwaną 0 oraz wariancję równą 1, to górna granica ciągu $\left(\pm\sum_{k=1}^{n} X_k\right)/\sqrt{2n\log\log n}$ przy $n\to\infty$ wynosi 1 prawie na pewno.

Podobnie jak dla centralnego twierdzenia granicznego, można rozważać prawo iterowanego logarytmu dla łańcuchów Markowa. Wtedy dla wprowadzonego wyżej łańcucha Markowa $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ granica górna

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(X_1)+\cdots+\varphi(X_n)}{\sqrt{2n\log\log n}} = \sigma > 0$$

istnieje z prawdopodobieństwem 1.

W pracy dowodzimy centralnego twierdzenia granicznego oraz prawa iterowanego logarytmu dla łańcucha Markowa odpowiadającego spacerowi losowemu składającemu się z losowych homeomorfizmów okręgu, z grupy $\mathrm{Homeo}(\mathrm{S}^1)$. Wyniki dotyczą także własności granicznych w przypadku, gdy łańcuch Markowa startuje z dowolnego punktu na okręgu, a nie tylko z rozkładu stacjonarnego.

Rozdział 2

Podstawowe własności układów dynamicznych

Zanim przejdziemy do badań na okręgu S^1, które są głównym wynikiem pracy, przedstawimy ogólne własności operatorów Markowa i innych obiektów, które nas interesują, na przestrzeniach metrycznych polskich (ośrodkowych i zupełnych). Dla niektórych własności będziemy wymagali, aby przestrzeń była zwarta.

2.1 Operatory Markowa-Fellera

Niech (S, d) będzie przestrzenią metryczną polską. Przez $B(x, r)$ oznaczać będziemy otwartą kulę o środku w $x \in S$ i promieniu $r > 0$, czyli $B(x, r) = \{y \in S : d(x, y) < r\}$. Przez $|J|$ rozumiemy *średnicę* zbioru $J \subset S$, czyli kres górny odległości między dwoma dowolnymi punktami w J:

$$|J| = \sup_{x,y \in J} d(x, y).$$

Przez $C(S)$ oznaczać będziemy przestrzeń funkcji ciągłych na S o wartościach w $\mathbb{R}$, wyposażoną w normę supremum $\|\cdot\|$. Przez $\mathcal{M}(S)$ rozumiemy zbiór wszystkich miar skończonych, określonych na σ-algebrze zbiorów borelowskich $\mathcal{B}(S)$. Niech $\mathcal{M}_1(S) \subset \mathcal{M}(S)$ będzie zbiorem wszystkich miar probabilistycznych.

Dla każdej ograniczonej funkcji borelowskiej $f : S \to \mathbb{R}$ i każdej miary $\mu \in \mathcal{M}(S)$ wprowadzamy oznaczenie:

$$\langle f, \mu \rangle := \int_S f(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

Oznaczenie to, w dalszych częściach pracy należy rozumieć jako odnoszące się do aktualnie rozważanej przestrzeni S. Zatem w rozdziale 3 powyższa całka będzie po okręgu S^1.

Odwzorowanie $P : \mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(S)$ nazywamy *operatorem Markowa*, jeśli posiada następujące własności:

1. $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+}\forall_{\mu,\eta\in\mathcal{M}(S)}\ P(\alpha\mu + \beta\eta) = \alpha P\mu + \beta P\eta$,
2. $\forall_{\mu\in\mathcal{M}(S)}\ P\mu(S) = \mu(S)$.

Operator Markowa P nazywamy *operatorem Fellera*, jeśli istnieje liniowy operator $U : C(S) \to C(S)$ o własności

$$\forall_{f\in C(S)}\forall_{\mu\in\mathcal{M}(S)}\ \langle Uf, \mu\rangle = \langle f, P\mu\rangle.$$

Operator P jest operatorem *dualnym* do U, natomiast U nazywamy operatorem *predualnym* do P. Operator U można naturalnie rozszerzyć na przestrzeń $B(S)$ wszystkich ograniczonych funkcji borelowskich. W dalszej części pracy będziemy przyjmowali, że mamy rozszerzony operator U.

Miarę $\mu \in \mathcal{M}(S)$ nazywamy *niezmienniczą* (lub dokładniej *P-niezmienniczą*), jeśli $P\mu = \mu$. Miara ta jest *ergodyczna*, gdy każda U-niezmiennicza funkcja $f \in C(S)$ jest μ–p. w. stała.

Operator Markowa P nazwiemy *asymptotycznie stabilnym*, jeśli posiada jedyną miarę niezmienniczą $\mu_* \in \mathcal{M}_1(S)$ i ponadto dla każdej miary $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ ciąg $(P^n\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega słabo do μ_*, czyli

$$\forall_{f\in C(S)}\ \lim_{n\to\infty}\int_S f(x)P^n\mu(\mathrm{d}x) = \int_S f(x)\mu_*(\mathrm{d}x).$$

Operatory Markowa na przestrzeniach polskich, a także istnienie dla nich miar niezmienniczych, są przedmiotem badań między innymi w pracy [37].

2.2 Miara niezmiennicza na zbiorze zwartym

Niech $\Theta \subset \mathcal{M}_1(S)$. Rodzinę miar Θ nazywamy *ciasną*, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $K \subset S$ taki, że $\mu(K) \geqslant 1 - \varepsilon$ dla wszystkich $\mu \in \Theta$.

Uwaga 2.1. W szczególności na przestrzeni polskiej rodzina miar jednoelementowa $\Theta = \{\mu\}$ jest ciasna. Wynika to bezpośrednio z lematu Ulama, który mówi, że jeśli mamy dodatnią skończoną miarę borelowską $\mu \in \mathcal{M}(S)$ na przestrzeni polskiej S, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $K \subset S$ taki, że $\mu(S \setminus K) < \varepsilon$.

Z pojęciem ciasności związane jest twierdzenie Prochorowa, które wskazuje zależność między ciasnością miar a słabą zbieżnością w przestrzeni miar probabilistycznych. W pracy skorzystamy z poniższego sformułowania twierdzenia Prochorowa.

Twierdzenie 2.2 (Twierdzenie Prochorowa). *Niech $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem miar probabilistycznych na przestrzeni metrycznej (S,d). Jeżeli rodzina $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ciasna, to dany ciąg miar posiada podciąg słabo zbieżny, czyli istnieje miara probabilistyczna $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ taka, że $\mu_{n_k} \to \mu$ słabo przy $n_k \to \infty$.*

Dowód twierdzenia Prochorowa można znaleźć w [5].

Zauważmy, że na przestrzeni zwartej każda rodzina miar jest ciasna. Od teraz będziemy zakładać, że (S,d) jest zwartą przestrzenią metryczną.

Jednym z kluczowych odkryć, z których korzystamy w pracy, jest twierdzenie Kryłowa-Bogolubowa o istnieniu miary niezmienniczej. Oryginalnie twierdzenie to dotyczyło operatora transportu miary (tw. 2.3 poniżej). W pracy będziemy korzystać z wersji tego twierdzenia sformułowanej dla operatorów Fellera, dlatego podamy ją niżej wraz z dowodem (tw. 2.4). Dowód jest analogiczny jak w przypadku operatora transportu miary.

Twierdzenie 2.3 (Twierdzenie Kryłowa-Bogolubowa dla operatora transportu miary). *Niech (S,d) będzie zwartą przestrzenią metryczną i niech $T : S \to S$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy T posiada niezmienniczą borelowską miarę probabilistyczną, czyli istnieje miara $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ taka, że dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(S)$*

$$\mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A).$$

Twierdzenie 2.4 (Twierdzenie Kryłowa-Bogolubowa). *Niech (S,d) będzie zwartą przestrzenią metryczną, a $P : \mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(S)$ — operatorem Fellera określonym na borelowskich miarach skończonych zdefiniowanych na tej przestrzeni. Wtedy P posiada przynajmniej jedną niezmienniczą miarę probabilistyczną, czyli istnieje miara $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ taka, że dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(S)$*

$$P\mu(A) = \mu(A).$$

Dowód. Ustalmy $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. Ponieważ S jest zbiorem zwartym, to rodzina

$$\left\{\mu_n := \frac{\mu + P\mu + \cdots + P^{n-1}\mu}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

jest ciasną rodziną miar probabilistycznych. Z twierdzenia Prochorowa (tw. 2.2) ciąg miar $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posiada zatem podciąg słabo zbieżny, czyli istnieje miara $\mu_* \in \mathcal{M}_1(S)$ taka, że dla pewnego podciągu $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zachodzi

$$\mu_{n_k} = \frac{\mu + P\mu + \cdots + P^{n_k-1}\mu}{n_k} \xrightarrow[n_k\to\infty]{\text{słabo}} \mu_*.$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
P\mu_{n_k} &= P\left(\frac{\mu + P\mu + \cdots + P^{n_k-1}\mu}{n_k}\right) = \\
&= \frac{P\mu + P^2\mu + \cdots + P^{n_k}\mu}{n_k} = \mu_{n_k} + \frac{P^{n_k}\mu}{n_k} - \frac{\mu}{n_k} \xrightarrow[n_k\to\infty]{\text{słabo}} \mu_*.
\end{aligned}
$$

Bez trudu sprawdzamy, że operator Fellera P jest operatorem słabo ciągłym, więc

$$P\mu_{n_k} \xrightarrow[n_k\to\infty]{\text{słabo}} P\mu_*$$

i wobec tego

$$P\mu_* = \mu_*.$$

□

W pracy skorzystamy także ze zmodyfikowanej wersji twierdzenia ergodycznego Birkhoffa, znanej też jako indywidualne twierdzenie ergodyczne lub twierdzenie ergodyczne Kakutaniego ([18, Theorem 1], zobacz też [41, Theorem 5.2.4.]), które dotyczy operatora U i zbieżności po trajektoriach.

Twierdzenie 2.5 (Indywidualne twierdzenie ergodyczne, [18, Theorem 1])**.** *Niech (S, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną. Niech P będzie operatorem Fellera z operatorem predualnym U i niech μ będzie miarą niezmienniczą dla P. Dla każdej funkcji mierzalnej i ograniczonej $f : S \to \mathbb{R}$ istnieje funkcja mierzalna i ograniczona $g : S \to \mathbb{R}$ taka, że:*

$$\frac{f(y) + Uf(y) + \cdots + U^{n-1}f(y)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} g(y) \quad \textit{dla } \mu\text{–p. w. } y.$$

Ponadto jeśli μ jest miarą ergodyczną, to

$$\frac{f(y) + Uf(y) + \cdots + U^{n-1}f(y)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f, \mu\rangle \quad \textit{dla } \mu\text{–p. w. } y.$$

Ponieważ przestrzeń S jest zwarta, każdy operator Fellera posiada przynajmniej jedną miarę niezmienniczą z twierdzenia Kryłowa-Bogolubowa (tw. 2.4). Zauważmy, że aby udowodnić jedyność miary niezmienniczej, można wykazać istnienie jedynej miary ergodycznej, ponieważ miary ergodyczne są punktami ekstremalnymi zbioru wszystkich miar niezmienniczych ([1, Theorem 19.25]). Ponadto dla każdej miary niezmienniczej μ istnieje reprezentująca ją miara ρ_μ na zbiorze wszystkich miar ergodycznych $\mathcal{E}$ na S, taka, że dla każdego zbioru mierzalnego A

$$\mu(A) = \int_{\mathcal{E}} \eta(A)\rho_\mu(\mathrm{d}\eta).$$

Inaczej mówiąc, każda miara niezmiennicza jest kombinacją wypukłą miar ergodycznych (niezmienniczych). Pełne twierdzenie można znaleźć w monografii Viany i Oliveiry, [40, Theorem 5.1.3].

Pierwotnie własność dekompozycji miary udowodnił Rohlin dla układów dynamicznych ([35], zobacz też [40]). Później zagadnieniem zajmowali się między innymi Kifer i Pirogov ([19]). W pracy odwołujemy się do twierdzenia opracowanego przez D. Worma, dlatego że zajmował się on zagadnieniem szczegółowo pod kątem miar niezmienniczych dla operatorów Markowa.

2.3 Jedyność miary niezmienniczej, e-własność

Jedną z istotnych własności pomocnych w dowodzie istnienia jedynej miary niezmienniczej jest tak zwana e-własność dla operatorów Markowa. Została ona wprowadzona w pracy [23]. Przez (S, d) nadal rozumiemy zwartą przestrzenią metryczną.

Definicja 2.6. Mówimy, że operator Fellera $P : \mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(S)$ posiada *e-własność* w punkcie $x \in S$, jeśli dla dowolnej funkcji Lipschitza $\varphi : S \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{y \to x} \sup_{n \in \mathbb{N}} |U^n\varphi(x) - U^n\varphi(y)| = 0, \tag{2.3.1}$$

gdzie U jest operatorem predualnym do P.

Jeżeli operator Fellera $P : \mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(S)$ będzie posiadać e-własność w każdym punkcie $x \in S$, to będziemy mówić po prostu, że P posiada e-własność.

Znanym faktem, pomocnym przy wykazaniu e-własności dla P, jest poniższe stwierdzenie.

Fakt 2.7. *Jeśli przy zadanej metryce operator P posiada e-własność, to posiada ją także w metryce równoważnej.*

Dowód. Ponieważ przestrzeń S jest zwarta, to funkcje Lipschitza są gęste w $C(S)$. Zatem warunek (2.3.1) jest spełniony dla każdej funkcji ciągłej w odpowiadającej metryce, a tym samym dla każdej funkcji ciągłej w metryce równoważnej. □

Symbolem $\operatorname{supp} \mu$ będziemy oznaczali nośnik miary μ, to znaczy

$$\operatorname{supp} \mu := \{x \in S : \exists_{r>0}\ \mu(B(x, r)) > 0\}.$$

Zauważmy, że $\operatorname{supp} \mu$ jest zbiorem domkniętym.

Z kolei symbolem $\operatorname{supp} f$ dla funkcji $f : S \to \mathbb{R}$ będziemy oznaczali jej nośnik, to znaczy

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in S : f(x) \neq 0\}}.$$

Lemat 2.8. *Niech P będzie operatorem Fellera, który posiada e-własność. Wtedy dla dowolnych dwóch różnych miar ergodycznych $\mu, \eta \in \mathcal{M}_1(S)$ zachodzi warunek*

$$\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\eta = \emptyset.$$

Dowód. Niech P będzie operatorem Markowa, a U — operatorem predualnym do P. Przypuśćmy, że istnieje $x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\eta$, gdzie μ i η są dwiema różnymi probabilistycznymi miarami ergodycznymi na S. Dla dowolnej funkcji lipschitzowskiej $\varphi : S \to \mathbb{R}$, na mocy indywidualnego twierdzenia ergodycznego (tw. 2.5), zachodzą zbieżności:

$$\frac{\varphi(y) + U\varphi(y) + \cdots + U^{n-1}\varphi(y)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \varphi, \mu \rangle \text{ dla } \mu\text{–p. w. } y, \tag{2.3.2}$$

$$\frac{\varphi(z) + U\varphi(z) + \cdots + U^{n-1}\varphi(z)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \varphi, \eta \rangle \text{ dla } \eta\text{–p. w. } z. \tag{2.3.3}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ P posiada e-własność, to dowolnie blisko x znajdziemy $y \in \operatorname{supp}\mu$ oraz $z \in \operatorname{supp}\eta$ takie, że zachodzą odpowiednio warunki (2.3.2) i (2.3.3) oraz dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$|U^n\varphi(x) - U^n\varphi(y)| < \varepsilon \text{ oraz } |U^n\varphi(x) - U^n\varphi(z)| < \varepsilon. \tag{2.3.4}$$

Ponieważ $\varepsilon > 0$ był dowolny, to ze zbieżności (2.3.2) i (2.3.3) otrzymujemy, że dla funkcji lipschitzowskiej $\varphi : S \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\langle \varphi, \mu \rangle = \langle \varphi, \eta \rangle.$$

Ponieważ φ była dowolną funkcją lipschitzowską, to warunek ten prowadzi do równości miar. Istotnie, gdyby $\mu \neq \eta$, istniałby zbiór domknięty $A \subset S$, taki, że $\mu(A) < \eta(A)$ lub $\eta(A) < \mu(A)$. Załóżmy pierwszą z tych nierówności. Z ciągłości miary istnieje wówczas $\xi > 0$ takie, że

$$\mu(A^\xi) < \eta(A), \tag{2.3.5}$$

gdzie $A^\xi = \{x \in S : d(x, A) < \xi\}$ oznacza ξ–otoczkę zbioru A. Oczywiście A jest zbiorem otwartym, więc borelowskim.

Niech $h = \max\left\{0, 1 - \frac{1}{\xi}d(x, A)\right\}$. Wówczas

$$\mathbb{1}_A \leqslant h \leqslant \mathbb{1}_{A^\xi}$$

i wobec tego

$$\eta(A) \leqslant \langle \varphi, \eta \rangle = \langle \varphi, \mu \rangle \leqslant \mu(A^\xi),$$

co przeczy warunkowi (2.3.5).

Drugą nierówność, $\eta(A) < \mu(A)$, wykluczamy analogicznie. W ten sposób kończymy dowód równości $\mu = \eta$. □

Wprowadźmy następujące definicje.

Definicja 2.9. Mówimy, że operator Fellera P z operatorem predualnym U posiada *asymptotyczną e-własność w średniej* w punkcie $x \in S$, jeżeli dla każdej funkcji Lipschitza $\varphi : S \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{y\to x} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \left(U^k\varphi(x) - U^k\varphi(y) \right) \right| = 0,$$

gdzie U jest operatorem predualnym do P.

Definicja asymptotycznej e-własności w średniej opiera się na e-własności w sensie Cesáro i została wprowadzona przez D. Worma w [41].

Definicja 2.10. Mówimy, że operator Fellera P z operatorem predualnym U posiada *e-własność w sensie Cesáro* w punkcie $x \in S$, jeżeli dla każdej funkcji Lipschitza $\varphi : S \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{y\to x} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \left(U^k\varphi(x) - U^k\varphi(y) \right) \right| = 0,$$

gdzie U jest operatorem predualnym do P.

W przypadku gdy operator P będzie posiadał asymptotyczną e-własność w średniej lub e-własność w sensie Cesáro w każdym punkcie $x \in S$, będziemy mówić po prostu, że operator P posiada odpowiednio asymptotyczną e-własność w średniej lub e-własność w sensie Cesáro.

Uwaga 2.11. Zauważmy, że w lemacie 2.8 zamiast e-własności wystarczy założyć, że operator P posiada e-własność w sensie Cesáro lub asymptotyczną e-własność w średniej.

Podana e-własność w sensie Cesáro jest silniejsza od asymptotycznej e-własności w średniej; ta jednak wystarczy do udowodnienia głównego twierdzenia dotyczącego istnienia miary niezmienniczej przy naszych założeniach. Pomocny w tym będzie poniższy lemat.

Lemat 2.12. *Niech P będzie operatorem Fellera i niech $\mu_* \in \mathcal{M}_1(S)$ będzie ergodyczną miarą niezmienniczą dla P. Jeśli P posiada asymptotyczną e-własność w średniej w punkcie $x \in \operatorname{supp}\mu_*$, to ciąg $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k\delta_x \right)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega słabo do μ_*.*

Dowód. Niech P będzie operatorem Fellera z miarą ergodyczną $\mu_* \in \mathcal{M}_1(S)$. Weźmy dowolny punkt $x \in \operatorname{supp}\mu_*$ i załóżmy, że P posiada asymptotyczną e-własność w średniej w punkcie x. Ustalmy funkcję lipschitzowską $\varphi : S \to \mathbb{R}$. Ponieważ P

posiada asymptotyczną e-własność w średniej w punkcie $x \in \operatorname{supp} \mu_*$, to zachodzi warunek

$$\lim_{y \to x} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \Big(U^k \varphi(x) - U^k \varphi(y) \Big) \right| = 0, \tag{2.3.6}$$

gdzie U jest operatorem predualnym do P.

Podobnie jak w dowodzie lematu 2.8, z indywidualnego twierdzenia ergodycznego (tw. 2.5) zachodzi zbieżność

$$\frac{\varphi(y) + U\varphi(y) + \cdots + U^{n-1}\varphi(y)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \varphi, \mu_* \rangle \ \text{ dla } \mu_* \text{–p. w. } y. \tag{2.3.7}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z warunku (2.3.6) wynika, że dowolnie blisko $x \in \operatorname{supp} \mu_*$ znajdziemy $y \in \operatorname{supp} \mu_*$ spełniający warunek (2.3.7) oraz $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $n > N_0$ zachodzi

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \Big(U^k \varphi(x) - U^k \varphi(y) \Big) \right| < \varepsilon.$$

Dzięki temu

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U^k \varphi(x) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U^k \varphi(y) \right| = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U^k \varphi(x) - \langle \varphi, \mu_* \rangle \right| \leqslant \varepsilon.$$

Przy $\varepsilon \to 0$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U^k \varphi(x) - \langle \varphi, \mu_* \rangle \right| = 0.$$

Stąd, ze zbieżności (2.3.7) oraz korzystając z tego, że $U\varphi(x) = \langle U\varphi, \delta_x \rangle = \langle \varphi, P\delta_x \rangle$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U^k \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \langle \varphi, P^k \delta_x \rangle = \langle \varphi, \mu_* \rangle,$$

gdzie $U^0 \varphi := \varphi$. Ponieważ φ była dowolną funkcją lipschitzowską, dostajemy słabą zbieżność

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k \delta_x \xrightarrow[n_k \to \infty]{\text{słabo}} \mu_*,$$

co kończy dowód.

$\square$

Rozdział 3

Ergodyczność układu na okręgu

W niniejszym rozdziale przeprowadzimy dowód istnienia jedynej miary niezmienniczej dla operatora Markowa generowanego przez stochastyczny układ dynamiczny złożony z losowych homeomorfizmów okręgu. Podobny wynik uzyskany dla iterowanego układu funkcyjnego generowanego przez nieprzeliczalną rodzinę homeomorfizmów okręgu, o zadanej gęstości prawdopodobieństwa, opublikowany został w pracy [29]. Uogólniamy tamten wynik, przyjmując słabsze założenia.

3.1 Nieskończona rodzina funkcji na okręgu

Układy losowe na okręgu są przedmiotem badań od wielu lat — patrz [2, 12, 13, 33, 38]. Na ogół zakładane było, że układ funkcyjny składa się ze skończenie wielu transformacji. Niedawno D. Malicet w pracy [31] udowodnił istnienie jedynej miary niezmienniczej (ergodycznej) dla iterowanych układów funkcyjnych na okręgu, nie zakładając, że rodzina transformacji jest skończona lub przeliczalna. W dowodzie skorzystał z zasady niezmienniczości uzyskanej przez A. Avilę i M. Vianę (zob. [3]). W poniższych badaniach wykorzystujemy natomiast e-własność, która została wprowadzona w [23] oraz niezależnie w [27]. Jest to bardzo użyteczne narzędzie przy badaniu ergodycznych własności operatorów Markowa (por. [41]). Pokażemy, że e-własność może być łatwo zweryfikowana i użyta do wykazania jedyności miary niezmienniczej przy naszych założeniach.

Podobne zagadnienia dotyczące synchronizacji (rozumianej jako zbieżność orbit startujących z różnych punktów, iterowanych przez ten sam ciąg losowych transformacji) są ostatnio przedmiotem intensywnych badań. A.J. Homburg w [17] rozszerzył okrąg do zwartej rozmaitości, podczas gdy A. Gorodetski i V. Kleptsyn w [15] badają problem synchronizacji, rozważając nie tylko różne przestrzenie (w tym też okrąg), ale także wyższe wymiary.

3.2 Dowód jedyności miary niezmienniczej

Przez S^1 będziemy oznaczać okrąg z orientacją przeciwną do ruchu wskazówek zegara. Dla $x, y \in \mathrm{S}^1$ przez $[x, y]$ oznaczamy domknięty przedział między x a y zgodnie z orientacją okręgu. Odległość między x a y oznaczamy przez $d(x, y)$ i definiujemy jako długość krótszego z przedziałów $[x, y]$ i $[y, x]$. Załóżmy bez strat ogólności, że długość okręgu jest równa 1. Metryka d jest równoważna metryce euklidesowej. Oczywiście (S^1, d) jest przestrzenią metryczną zwartą.

Rozważamy topologiczną półgrupę $(G, \circ)$ generowaną przez pewną rodzinę homeomorfizmów okręgu. Niech ν będzie miarą probabilistyczną zdefiniowaną na G, czyli $\int_G \nu(\mathrm{d}g) = 1$. Miara ν generuje na G lewostronny spacer losowy, czyli ciąg $\omega \mapsto (g^n_\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów losowych o wartościach w G, zdefiniowany na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathbb{P}) = (G^{\mathbb{N}}, \nu^{\otimes\mathbb{N}})$ następująco: dla $\omega = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ oraz $n \in \mathbb{N}$

$$g^n_\omega := g_n \circ \cdots \circ g_1.$$

Poprzez *działanie* G określamy wtedy wszystkie złożenia postaci g^n_ω, $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$.

Stochastyczny układ dynamiczny (S^1, G, ν) generuje operator Markowa P postaci

$$\forall_{\mu\in\mathcal{M}(\mathrm{S}^1)}\forall_{A\in\mathcal{B}(\mathrm{S}^1)}\ P\mu(A) = \int_G \mu(g^{-1}(A))\nu(\mathrm{d}g).$$

Operator P jest operatorem Fellera. Jego operator predualny $U : B(\mathrm{S}^1) \to B(\mathrm{S}^1)$ jest postaci

$$\forall_{f\in B(\mathrm{S}^1)}\forall_{x\in\mathrm{S}^1}\ Uf(x) = \int_G f(g(x))\nu(\mathrm{d}g).$$

Zauważmy, że P oraz U są ν-uśrednieniami deterministycznych operatorów indukowanych przez homeomorfizmy $g \in G$.

Wprowadzimy teraz pojęcie minimalności działania G przy zadanej mierze probabilistycznej ν, co będziemy rozumieli także jako minimalność działania stochastycznego układu dynamicznego (S^1, G, ν).

Definicja 3.1. Niech dana będzie półgrupa G elementów z przestrzeni $\mathrm{Homeo}(\mathrm{S}^1)$. Niech ν będzie miarą probabilistyczną zdefiniowaną na G. Powiemy, że G *działa minimalnie* (lub że działanie G jest *minimalne*), jeżeli dla każdego niepustego zbioru $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S}^1)$ z faktu, że $g(A) \subset A$ dla ν–p. w. $g \in G$, wynika że $\overline{A} = \mathrm{S}^1$.

Uwaga 3.2. Niech Ψ będzie rodziną generatorów grupy G. Jeśli rodzina ta jest skończona (patrz np. [31]), a jej generatorom przyporządkowane jest dodatnie prawdopodobieństwo, to działanie G jest minimalne wtedy i tylko wtedy, gdy orbita każdego punktu jest gęsta. Przez orbitę punktu $x \in \mathrm{S}^1$ rozumiemy zbiór startujących z niego trajektorii, czyli $\left\{g_\omega(x) \in \mathrm{S}^1 : \omega \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \Psi^n\right\}$. Równoważnie, G działa minimalnie, gdy dla każdego zbioru $A \subset \mathrm{S}^1$, który jest domknięty i Ψ-niezmienniczy ($g(A) \subset A$ dla każdego $g \in \Psi$), zachodzi albo $A = \emptyset$, albo $A = \mathrm{S}^1$. Zauważmy, że jeżeli rodzina generatorów Ψ jest nieprzeliczalna, a miara probabilistyczna jest dowolna, to wtedy nadal z minimalności działania G wynika gęstość każdej orbity. W odwrotną stronę jednak zależność nie zachodzi, ponieważ orbita punktu na okręgu mogłaby być gęsta jedynie ze względu na specyficzny generator w zbiorze Ψ, który nie należy do $\operatorname{supp}\nu$. W takim przypadku nie możemy wnioskować minimalności działania, gdyż nie mamy wystarczających informacji na temat homeomorfizmów z $\operatorname{supp}\nu$, dla których zachodzi poprzednik implikacji podanej w definicji 3.1.

Własność minimalności działania posłuży nam do udowodnienia e-własności i w konsekwencji jedyności miary niezmienniczej dla odpowiedniego operatora Fellera. Zależność tę opisuje poniższe twierdzenie. Wskażmy jeszcze, że przez G^{-1} rozumiemy zbiór homeomorfizmów będących odwrotnościami elementów z G, czyli $G^{-1} := \{g^{-1} : g \in G\}$. Ponadto miarę dla stochastycznego układu dynamicznego $(\mathrm{S}^1, G^{-1}, \tilde{\nu})$ definiujemy następująco: $\tilde{\nu}(g^{-1}) := \nu(g)$ dla każdego $g^{-1} \in G^{-1}$.

Twierdzenie 3.3. *Niech dana będzie półgrupa G elementów z przestrzeni* $\mathrm{Homeo}(\mathrm{S}^1)$ *i niech ν będzie miarą probabilistyczną zdefiniowaną na G. Jeżeli G^{-1} działa minimalnie, to operator Fellera P odpowiadający stochastycznemu układowi dynamicznemu (S^1, G, ν) posiada e-własność oraz ma jedyną miarę niezmienniczą.*

Dowód. Dla stochastycznego układu dynamicznego $(\mathrm{S}^1, G^{-1}, \tilde{\nu})$, gdzie $\tilde{\nu}(g^{-1}) := \nu(g)$ dla każdego $g^{-1} \in G^{-1}$, niech $\widetilde{P}$ będzie odpowiadającym mu operatorem Fellera, czyli

$$\forall_{\mu \in \mathcal{M}(\mathrm{S}^1)} \forall_{A \in \mathcal{B}(\mathrm{S}^1)} \ \widetilde{P}\mu(A) = \int_G \mu(g(A))\nu(\mathrm{d}g).$$

Niech $\tilde{\mu}$ będzie miarą niezmienniczą dla $\widetilde{P}$. Taka miara istnieje na mocy twierdzenia Kryłowa-Bogolubowa (tw. 2.4), ponieważ okrąg S^1 jest zwarty.

Półgrupa G^{-1} działa minimalnie, zatem każdy niepusty zbiór $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S}^1)$, dla którego

$$g^{-1}(A) \subset A \ \text{ dla } \nu\text{–p. w. } g,$$

spełnia $\overline{A} = \mathrm{S}^1$.

Pokażemy, że $\operatorname{supp}\tilde{\mu} = \mathrm{S}^1$. Mamy

$$1 = \tilde{\mu}(\operatorname{supp}\tilde{\mu}) = \widetilde{P}\tilde{\mu}(\operatorname{supp}\tilde{\mu}) = \int_G \tilde{\mu}\left(g(\operatorname{supp}\tilde{\mu})\right)\nu(\mathrm{d}g).$$

Stąd wynika

$$\tilde{\mu}\left(g(\operatorname{supp}\tilde{\mu})\right) = 1 = \tilde{\mu}(\operatorname{supp}\tilde{\mu}) \ \text{ dla } \nu\text{–p. w. } g.$$

zbiór $g(\operatorname{supp}\tilde{\mu})$ jest domknięty, a $\operatorname{supp}\tilde{\mu}$ jest najmniejszym domkniętym zbiorem pełnej miary, więc $g(\operatorname{supp}\tilde{\mu}) \supset \operatorname{supp}\tilde{\mu}$ dla ν–p. w. g. Stąd $g^{-1}(\operatorname{supp}\tilde{\mu}) \subset \operatorname{supp}\tilde{\mu}$ dla ν–p. w. g. Z minimalności działania G^{-1} otrzymujemy $\operatorname{supp}\tilde{\mu} = \mathrm{S}^1$.

W następnym kroku pokażemy, że miara $\tilde{\mu}$ jest bezatomowa. W tym celu załóżmy nie wprost, że $\tilde{\mu}$ posiada przynajmniej jeden atom i niech $u \in \mathrm{S}^1$ będzie atomem o największej mierze $\tilde{\mu}(\{u\}) > 0$. Taki atom istnieje, ponieważ $\tilde{\mu}$ jest miarą probabilistyczną, a więc skończoną. Rozważmy zbiór $W = \{v \in \mathrm{S}^1 : \tilde{\mu}(\{v\}) = \tilde{\mu}(\{u\})\}$ wszystkich atomów o największej mierze. Miara $\tilde{\mu}$ jest niezmiennicza dla $\widetilde{P}$, zatem

$$\tilde{\mu}(\{v\}) = \widetilde{P}\tilde{\mu}(\{v\}) = \int_G \tilde{\mu}(\{g(v)\})\nu(\mathrm{d}g)$$

dla każdego $v \in W$. Z definicji ν oraz W otrzymujemy, że dla każdego $v \in W$

$$\tilde{\mu}(\{g(v)\}) = \tilde{\mu}(\{v\}) \quad \text{dla } \nu\text{–p. w. } g,$$

a więc $g(v) \in W$ dla ν–p. w. g. Zbiór W musi być skończony, a $g \in G$ są homeomorfizmami, zatem dla ν–prawie wszystkich g zachodzi $g(W) = W$ i wobec tego $g^{-1}(W) = W$. Przeczy to minimalności działania G^{-1}, ponieważ $W = \overline{W} \neq \mathrm{S}^1$. Pokazaliśmy więc, że $\tilde{\mu}$ jest miarą bezatomową.

W kolejnym kroku wykażemy e-własność dla P. Zdefiniujmy funkcję $\chi : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}_+$ następująco:

$$\forall_{x,y \in \mathrm{S}^1}\ \chi(x,y) := \min\{\tilde{\mu}([x,y]), \tilde{\mu}([y,x])\}.$$

Dzięki temu, że miara $\tilde{\mu}$ jest bezatomowa i jej nośnikiem jest S^1, można łatwo pokazać, że funkcja χ jest metryką, a ponadto zbieżność w χ jest równoważna zbieżności w d.

Niech $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją Lipschitza względem metryki χ, czyli

$$\forall_{x,y \in \mathrm{S}^1}\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \chi(x,y). \tag{3.2.1}$$

Ustalmy $x, y \in \mathrm{S}^1$. Z własności (3.2.1) oraz definicji operatora U mamy

$$\begin{aligned}
|U\varphi(x) - U\varphi(y)| &\leqslant \int_G |\varphi(g(x)) - \varphi(g(y))|\nu(\mathrm{d}g) \leqslant \\
&\leqslant \int_G \chi(g(x), g(y))\nu(\mathrm{d}g) \leqslant \\
&\leqslant \int_G \tilde{\mu}(g([x,y]))\nu(\mathrm{d}g) = \\
&= \widetilde{P}\tilde{\mu}([x,y]) = \tilde{\mu}([x,y]).
\end{aligned}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned}
|U\varphi(x) - U\varphi(y)| &\leqslant \int_G |\varphi(g(x)) - \varphi(g(y))|\nu(\mathrm{d}g) \leqslant \\
&\leqslant \int_G \tilde{\mu}(g([y,x]))\nu(\mathrm{d}g) = \tilde{\mu}([y,x]).
\end{aligned}$$

Stąd dla dowolnych $x, y \in \mathrm{S}^1$ dostajemy

$$|U\varphi(x) - U\varphi(y)| \leqslant \min\{\tilde{\mu}([x,y]), \tilde{\mu}([y,x])\} = \chi(x,y).$$

Iterując powyższą nierówność, otrzymujemy $|U^n\varphi(x) - U^n\varphi(y)| \leqslant \chi(x,y)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla dowolnych $x, y \in \mathrm{S}^1$. Stąd wnioskujemy, że dla dowolnych $x, y \in \mathrm{S}^1$

$$0 \leqslant \lim_{y \to x} \sup_{n \in \mathbb{N}} |U^n\varphi(x) - U^n\varphi(y)| \leqslant \lim_{y \to x} \chi(x,y) = 0.$$

Dla dowolnie wybranej funkcji lipschitzowskiej względem metryki χ i dla każdego $x \in \mathrm{S}^1$ uzyskaliśmy e-własność dla operatora P,

$$\lim_{y \to x} \sup_{n \in \mathbb{N}} |U^n\varphi(x) - U^n\varphi(y)| = 0.$$

Metryka χ jest równoważna metryce d, więc na mocy faktu 2.7 operator P posiada e-własność w metryce d.

Możemy przejść do ostatniej części dowodu, w której wykażemy jedyność miary niezmienniczej dla operatora Fellera P. Załóżmy nie wprost, że istnieją dwie różne miary P-niezmiennicze $\mu, \upsilon \in \mathcal{M}_1(\mathrm{S}^1)$. Operator P posiada e-własność, więc z lematu 2.8

$$\operatorname{supp} \mu \cap \operatorname{supp} \upsilon = \emptyset.$$

Niech $\mathcal{O}$ będzie zbiorem wszystkich otwartych odcinków $I \subset \mathrm{S}^1 \setminus (\operatorname{supp} \mu \cup \operatorname{supp} \upsilon)$ takich, że jeżeli $I = (a,b)$ to albo $a \in \operatorname{supp} \mu$ i $b \in \operatorname{supp} \upsilon$, albo $a \in \operatorname{supp} \upsilon$ i $b \in \operatorname{supp} \mu$.

Nośniki miar μ i υ są domknięte i rozłączne, więc istnieje $I_0 \in \mathcal{O}$ takie, że

$$\tilde{\mu}(I_0) = \inf_{I \in \mathcal{O}} \tilde{\mu}(I) > 0.$$

Pokażemy, że $g(\operatorname{supp} \mu) \subset \operatorname{supp} \mu$ dla ν–prawie wszystkich $g \in G$. Wiemy, że

$$1 = \mu(\operatorname{supp} \mu) = P\mu(\operatorname{supp} \mu) = \int_G \mu\left(g^{-1}(\operatorname{supp} \mu)\right) \nu(\mathrm{d}g),$$

a więc

$$\mu\left(g^{-1}(\operatorname{supp} \mu)\right) = 1 \;\text{ dla } \nu\text{–p. w. } g,$$

skąd

$$g(\operatorname{supp} \mu) \subset \operatorname{supp} \mu \;\text{ dla } \nu\text{–p. w. } g.$$

W ten sam sposób otrzymujemy, że $g(\operatorname{supp} \upsilon) \subset \operatorname{supp} \upsilon$ dla ν–prawie wszystkich $g \in G$. Zatem oznacza to, że dla ν–prawie każdego $g \in G$ przedział $g(I_0)$ posiada oba końce w nośnikach μ oraz υ (każdy koniec w innym nośniku).

Pokażemy, że $g(I_0) \in \mathcal{O}$ dla ν–prawie każdego $g \in G$. Wybierzmy dowolnie $g \in G$. Ponieważ przedział $g(I_0)$ ma ν–prawie na pewno jeden koniec w $\operatorname{supp} \mu$ a drugi koniec w $\operatorname{supp} \upsilon$, to istnieje $J \in \mathcal{O}$ takie, że $J \subset g(I_0)$. Z definicji I_0 dostajemy, że $\tilde{\mu}(I_0) \leqslant \tilde{\mu}(J) \leqslant \tilde{\mu}(g(I_0))$, a więc

$$\tilde{\mu}(I_0) \leqslant \tilde{\mu}(g(I_0)) \text{ dla } \nu\text{–p. w. } g. \tag{3.2.2}$$

Ponieważ $\tilde{\mu}$ jest niezmiennicza, mamy

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{\mu}(I_0) - \tilde{\mu}(I_0) &= \tilde{P}\tilde{\mu}(I_0) - \tilde{\mu}(I_0) = \\ &= \int_G \tilde{\mu}\left(g(I_0)\right)\nu(\mathrm{d}g) - \int_G \tilde{\mu}(I_0)\nu(\mathrm{d}g) = \\ &= \int_G \left[\tilde{\mu}\left(g(I_0)\right) - \tilde{\mu}(I_0)\right]\nu(\mathrm{d}g). \end{aligned}$$

Łącząc powyższe z własnością (3.2.2), dostajemy

$$\tilde{\mu}(I_0) = \tilde{\mu}(g(I_0)) \text{ dla } \nu\text{–p. w. } g, \tag{3.2.3}$$

co oznacza, że $g(I_0) \in \mathcal{O}$ dla ν–prawie wszystkich $g \in G$.

Określmy $\mathcal{I} := \{J \in \mathcal{O} : \tilde{\mu}(J) = \tilde{\mu}(I_0)\}$. Zbiór $\mathcal{I}$ jest skończony, ponieważ składa się z otwartych, rozłącznych przedziałów o tej samej dodatniej mierze, a miara $\tilde{\mu}$ jest ograniczona.

Pokażemy, że $g(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$ dla ν–prawie wszystkich $g \in G$. Ustalmy przedział $J \in \mathcal{I}$ oraz weźmy dowolne $g \in G$. Przedział $g(J)$ ma ν–prawie na pewno końce zarówno w $\operatorname{supp} \mu$, jak i w $\operatorname{supp} \upsilon$. Wtedy istnieje $M \in \mathcal{O}$ takie, że $M \subset g(J)$. Zatem

$$\tilde{\mu}(J) = \tilde{\mu}(I_0) \leqslant \tilde{\mu}(M) \leqslant \tilde{\mu}(g(J)).$$

Podobnie jak (3.2.3) otrzymujemy, że

$$\tilde{\mu}(J) = \tilde{\mu}(g(J)) \text{ dla } \nu\text{–p. w. } g.$$

Wnioskujemy, że $g(J) \in \mathcal{O}$ oraz $g(J) \in \mathcal{I}$, co oznacza, że $g(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$ dla ν–prawie wszystkich g. Zbiór $\mathcal{I}$ jest skończony, zaś $g \in G$ są homeomorfizmami, więc otrzymujemy, że $g(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ dla ν–prawie każdego $g \in G$.

Zdefiniujmy jeszcze E jako zbiór wszystkich końców przedziałów z $\mathcal{I}$. Podobnie jak $\mathcal{I}$, zbiór E jest skończony. Elementy zbioru $\mathcal{I}$ są rozłączne, więc $g(E) = E$ dla ν–prawie każdego $g \in G$. Zbiór E jest domknięty, niepusty i w szczególności

$$g^{-1}(E) \subset E \text{ dla } \nu\text{–p. w. } g,$$

ale $E \neq \mathrm{S}^1$. Fakt ten przeczy założeniu o minimalności działania G^{-1}. Zatem P posiada jedyną miarę niezmienniczą i dowód został ukończony.

□

Kolejne twierdzenie wiąże minimalność działania oraz istnienie jedynej miary niezmienniczej dla odpowiadającego operatora Fellera.

Twierdzenie 3.4. *Niech dana będzie półgrupa G elementów z przestrzeni* $\mathrm{Homeo}(\mathrm{S}^1)$ *i niech ν będzie miarą probabilistyczną zdefiniowaną na G. Jeżeli G działa minimalnie, to operator Fellera P odpowiadający stochastycznemu układowi dynamicznemu* (S^1, G, ν) *posiada jedyną miarę niezmienniczą.*

Dowód. Niech P oraz $\widetilde{P}$ będą operatorami Fellera odpowiadającymi odpowiednio stochastycznym układom dynamicznym (S^1, G, ν) oraz $(\mathrm{S}^1, G^{-1}, \tilde{\nu})$, gdzie, przypomnijmy, $\tilde{\nu}(g^{-1}) := \nu(g)$ dla każdego $g^{-1} \in G^{-1}$. Z twierdzenia 3.3 operator $\widetilde{P}$ posiada jedyną miarę niezmienniczą, którą oznaczymy jako $\tilde{\mu}$. Z dowodu twierdzenia 3.3 możemy wywnioskować, że P posiada jedyną miarę niezmienniczą, jeśli $\operatorname{supp}\tilde{\mu} = \mathrm{S}^1$.

Załóżmy więc, że $\operatorname{supp}\tilde{\mu} \neq \mathrm{S}^1$. Istnieje zatem przedział $(a, b) \subset \mathrm{S}^1 \setminus \operatorname{supp}\tilde{\mu}$. Dla $\omega = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ przyjmijmy oznaczenie $g_\omega = g_n \circ \cdots \circ g_1$. Zauważmy, że

$$\tilde{\mu}((a, b)) = \widetilde{P}\tilde{\mu}((a, b)) = \int_G \tilde{\mu}(g((a, b)))\nu(\mathrm{d}g) = 0.$$

Zatem dla ν–prawie wszystkich $g \in G$ mamy $\tilde{\mu}(g((a, b))) = 0$. Poprzez analogię dla kolejnych iteracji otrzymujemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla $\nu^{\otimes n}$–prawie wszystkich $\omega \in G^n$ zachodzi

$$\tilde{\mu}(g_\omega((a, b))) = 0. \tag{3.2.4}$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ niech Ω_n^* będzie zbiorem tych $\omega \in G^n$, dla których własność (3.2.4) jest spełniona. Oczywiście $\nu^{\otimes n}(\Omega_n^*) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy zbiór

$$S_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\omega \in \Omega_n^*} g_\omega((a, b)).$$

Zbiór S_0 jest sumą przedziałów otwartych, więc jest otwarty.

W następnym kroku pokażemy asymptotyczną e-własność w średniej dla P. Wybierzmy dowolnie punkt $x \in (a, b)$ oraz otwarty przedział I taki, że $\overline{I} \subset (a, b)$. Ciąg $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{P}^k \delta_x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega słabo do $\tilde{\mu}$, ponieważ $\tilde{\mu}$ jest jedyną miarą niezmienniczą dla operatora $\widetilde{P}$.

Ponieważ $\tilde{\mu}(I) = 0$, możemy wybrać taką funkcję $h \in C(\mathrm{S}^1)$, dla której $\operatorname{supp} h \subset (a, b)$ oraz $\mathbb{1}_I \leqslant h$. Niech $\widetilde{U}$ będzie operatorem predualnym do $\widetilde{P}$. Wtedy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{U}^k \mathbb{1}_I(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left\langle \mathbb{1}_I, \widetilde{P}^k \delta_x \right\rangle \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left\langle h, \widetilde{P}^k \delta_x \right\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle h, \tilde{\mu} \rangle = 0.$$

Ponadto zachodzi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{U}^k\mathbb{1}_I(x) = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underset{G^k}{\int\cdots\int}\mathbb{1}_I\left(g_1^{-1}\circ\cdots\circ g_k^{-1}(x)\right)\nu(\mathrm{d}g_1)\ldots\nu(\mathrm{d}g_k) = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underset{G^k}{\int\cdots\int}\mathbb{1}_{g_k\circ\cdots\circ g_1(I)}(x)\nu(\mathrm{d}g_1)\ldots\nu(\mathrm{d}g_k) = \qquad (3.2.5)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underset{G^k}{\int\cdots\int}\mathbb{1}_{\{x\}}\left(g_k\circ\cdots\circ g_1(I)\right)\nu(\mathrm{d}g_1)\ldots\nu(\mathrm{d}g_k) = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underset{G^k}{\int\cdots\int}\mathbb{1}_{\{x\}}\left(g_\omega(I)\right)\nu^{\otimes k}(\mathrm{d}g_\omega).
\end{aligned}$$

Niech $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją lipschitzowską o stałej Lipschitza L. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy skończony zbiór $\{x_0, \ldots, x_N\} \subset \mathrm{S}^1$ taki, że $d(x_i, x_{i+1}) < \frac{\varepsilon}{L}$ dla każdego $i \in \{0, \ldots, N\}$, przy czym $x_{N+1} = x_0$. Korzystając z równości (3.2.5), otrzymujemy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underset{G^k}{\int\cdots\int}\mathbb{1}_{\{x_0,\ldots,x_N\}}\left(g_\omega(I)\right)\nu^{\otimes k}(\mathrm{d}g_\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad (3.2.6)$$

Niech U będzie operatorem predualnym do P. Stosując (3.2.6), mamy

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(U^k\varphi(x) - U^k\varphi(y)\right)\right| \leqslant \\
&\leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underset{G^k}{\int\cdots\int}\left|\varphi(g_\omega(x)) - \varphi(g_\omega(y))\right|\nu^{\otimes k}(\mathrm{d}\omega) \leqslant \\
&\leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n}\underset{G^k}{\int\cdots\int} d\left(g_\omega(x), g_\omega(y)\right)\nu^{\otimes k}(\mathrm{d}\omega) \leqslant \\
&\leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n}\underset{G^k}{\int\cdots\int}\left[\frac{\varepsilon}{L} + \mathbb{1}_{\{x_0,\ldots,x_N\}}\left(g_\omega(I)\right)\right]\nu^{\otimes k}(\mathrm{d}\omega) = \\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\varepsilon}{n}\cdot n\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{L}{n}\sum_{k=1}^{n}\underset{G^k}{\int\cdots\int}\mathbb{1}_{\{x_0,\ldots,x_N\}}\left(g_\omega(I)\right)\nu^{\otimes k}(\mathrm{d}\omega) = \\
&= \varepsilon + L\cdot 0 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Z dowolności wyboru ε oraz przedziału $I \subsetneq (a, b)$ otrzymujemy, że operator P posiada asymptotyczną e-własność w średniej w dowolnym punkcie $x \in (a, b)$. Niech $\mu_* \in \mathcal{M}_1(\mathrm{S}^1)$ będzie ergodyczną miarą niezmienniczą dla P. Półgrupa G działa minimalnie, więc $\operatorname{supp}\mu_* = \mathrm{S}^1$ i w konsekwencji $(a, b) \subset \operatorname{supp}\mu_*$. Zatem z lematu 2.12 dla każdego $x \in (a, b)$ ciąg $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}P^k\delta_x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega słabo do μ_*. To oznacza, że μ_* jest jedyną (ergodyczną) miarą niezmienniczą dla P, co kończy dowód.

□

Uwaga 3.5. Zauważmy, że z dowodu e-własności, przeprowadzonego podczas dowodzenia twierdzenia 3.3, wynika, że operator P jest *nierozszerzający* względem metryki Wassersteina zdefiniowanej na (S^1, χ), czyli dla dwóch miar probabilistycznych μ_1 i μ_2 zachodzi

$$\mathrm{d}_W(P\mu_1, P\mu_2) \leqslant \mathrm{d}_W(\mu_1, \mu_2),$$

gdzie χ jest metryką wprowadzoną w dowodzie. To spostrzeżenie przyda nam się w dalszych rozważaniach na temat asymptotycznej stabilności operatora P.

3.3 Przykłady zastosowania twierdzenia o jedynej mierze niezmienniczej

Przyjrzyjmy się przykładom zastosowania twierdzenia 3.4.

Niech $\Lambda = [0, 1]$ i niech $p : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ będzie gęstością prawdopodobieństwa, czyli $\int_0^1 p(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 1$. Dla każdego $\lambda \in [0, 1/2)$ definiujemy funkcję $g_\lambda : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ następująco:

$$\forall_{x\in\mathrm{S}^1}\ g_\lambda(x) := \lambda h_1(x) + (1 - \lambda)h_2(x),$$

gdzie h_1 i h_2 są dwoma różnymi homeomorfizmami okręgu, przy czym na potrzeby tej definicji utożsamiamy okrąg S^1 z grupą ilorazową $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, czyli z odcinkiem $[0, 1)$ z utożsamionymi końcami. Niech $h_3 : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ będzie homeomorfizmem o gęstej orbicie dla pewnego punktu na okręgu (a więc dla wszystkich punktów). Dla każdego $\lambda \in [1/2, 1]$ przyjmijmy $g_\lambda := h_3$. Oczywiście funkcje g_λ są homeomorfizmami na S^1.

Rozważmy stochastyczny układ dynamiczny (S^1, G, ν), gdzie G jest półgrupą generowaną przez rodzinę $\Psi = \{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, a ν jest miarą probabilistyczną zadaną przez gęstość p, to znaczy $\nu(\{g_\lambda : \lambda \in [0, t]\}) = \int_0^t p(u)\mathrm{d}u$. (Parę (Ψ, p) nazywamy *iterowanym układem funkcyjnym*). Ponadto niech $\nu(\{g_\lambda : \lambda \in [1/2, 1]\}) > 0$, co zapewni nam, że G działa minimalnie.

Założenia twierdzenia 3.4 są spełnione, więc operator Fellera P odpowiadający stochastycznemu układowi dynamicznemu (S^1, G, ν), będący postaci

$$\forall_{\mu\in\mathcal{M}(\mathrm{S}^1)}\forall_{A\in\mathcal{B}(\mathrm{S}^1)}\ P\mu(A) = \int_0^1 \mu(g_\lambda^{-1}(A))p(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

posiada jedyną miarę niezmienniczą zależną od definicji funkcji h_1, h_2, h_3 oraz gęstości p.

Asymptotyczna stabilność

Dla opisanego operatora Fellera rozważymy jeszcze warunki wystarczające na to, aby uzyskać asymptotyczną stabilność. Przypomnijmy, że operator P jest asymptotycznie stabilny, gdy posiada jedyną miarę niezmienniczą $\mu_* \in \mathcal{M}_1(\mathrm{S}^1)$ i dla każdej miary $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathrm{S}^1)$ ciąg $(P^n\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega słabo do μ_*, czyli

$$\forall_{f\in C(\mathrm{S}^1)} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{S}^1} f(x)P^n\mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathrm{S}^1} f(x)\mu_*(\mathrm{d}x). \tag{3.3.1}$$

W poprzednim rozdziale wykazaliśmy, że miara niezmiennicza dla operatora Markowa jest jedyna przy naszych założeniach. Pozostaje pytanie, kiedy warunek (3.3.1) jest spełniony. Możemy zauważyć, że nawet przy założeniu minimalności działania jesteśmy w stanie skonstruować operator, który nie jest asymptotycznie stabilny. Naszkicujemy poniżej taki przykład.

Rozważmy operatory $T_\gamma : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ postaci $T_\gamma(x) = x + \gamma \mod 1$ dla $x \in \mathrm{S}^1$, gdzie $\gamma \in \mathbb{R}$. W tym celu okrąg S^1 możemy znów rozumieć jako grupę ilorazową $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Wtedy T_γ jest tak zwanym podniesieniem, czyli operatorem obrotu punktu x na okręgu S^1 o kąt γ.

Niech $\Lambda = [0, 1]$ i niech $p : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ będzie gęstością prawdopodobieństwa, czyli $\int_0^1 p(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 1$. Niech ν będzie miarą probabilistyczną określoną przez gęstość p, to znaczy $\nu(\{g_\lambda : \lambda \in [0, t]\}) = \int_0^t p(u)\mathrm{d}u$. Zauważmy, że dla dowolnych $\lambda \in \Lambda$ oraz $\gamma, \theta \in \mathbb{R}$ zachodzą własności:

$$\begin{gathered} \lambda T_\gamma + (1-\lambda)T_\theta = T_{\lambda\gamma+(1-\lambda)\theta}, \\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ T_\gamma^n = T_{n\gamma}. \end{gathered} \tag{3.3.2}$$

Dla ustalonego $\tilde{\gamma}$ operator $T_{\tilde{\gamma}} \in \mathrm{Homeo}(\mathrm{S}^1)$. Jeżeli $\tilde{\gamma} \notin \mathbb{Q}$, to orbity funkcji $\tilde{g}_\lambda := T_{\tilde{\gamma}}$, $\lambda \in \Lambda$, są gęste, a tym samym półgrupa $\widetilde{G}$ generowana przez rodzinę $\{\tilde{g}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ działa minimalnie. Spełnione są założenia twierdzenia 3.4, zatem dla danego stochastycznego układu dynamicznego $(\mathrm{S}^1, \widetilde{G}, \nu)$ istnieje jedyna miara niezmiennicza.

Niech $\widetilde{P}$ oznacza operator Fellera generowany przez $(\mathrm{S}^1, \widetilde{G}, \nu)$. Zauważmy, że jeżeli weźmiemy dwa różne punkty $x, y \in \mathrm{S}^1$ oraz odpowiadające im miary Diraca, δ_x, δ_y, to niezależnie jak długo będziemy iterować odległość $\widetilde{P}^n\delta_x$ od $\widetilde{P}^n\delta_y$, nigdy nie zbliży się ona dowolnie blisko zera, ponieważ obracamy zbiory o ten sam ustalony kąt $\tilde{\gamma}$. Nie możemy natomiast uzyskać dwóch ciągów zbieżnych do różnych miar, ponieważ w naszym przypadku miara niezmiennicza jest jedyna. Zatem warunek (3.3.1) nie jest spełniony.

Przedstawiony szkic dowodu wskazuje, że do uzyskania asymptotycznej stabilności operatora Fellera P generowanego przez stochastyczny układ dynamiczny (S^1, G, ν), gdzie G działa minimalnie, potrzeba dodatkowych założeń. Rozpatrzymy poniższy przypadek.

Ustalmy γ i θ takie, że $\gamma - \theta \notin \mathbb{Q}$ i rozpatrzmy rodzinę Ψ funkcji $g_\lambda := T_{\lambda\gamma+(1-\lambda)\theta}$, $\lambda \in \Lambda$. Funkcje te są homeomorfizmami okręgu, a ponieważ $\gamma - \theta \notin \mathbb{Q}$, to $\gamma \notin \mathbb{Q}$ lub

$\theta \notin \mathbb{Q}$. Ten fakt oznacza, że orbity funkcji g_λ są gęste, a tym samym półgrupa G generowana przez rodzinę Ψ działa minimalnie. Jak powyżej, spełnione są założenia twierdzenia 3.4, zatem dla danego stochastycznego układu dynamicznego (S^1, G, ν) istnieje jedyna miara niezmiennicza, μ_*.

Aby wykazać asymptotyczną stabilność, skorzystamy z następującego twierdzenia, pochodzącego od A. Lasoty i J.A. Yorke'a, [28, Theorem 9.1] (zobacz także [28, Theorem 4.1] wraz z dowodem), podanego dla okręgu.

Twierdzenie 3.6 (Lasota-Yorke, [28, Theorem 9.1])**.** *Niech dana będzie przestrzeń metryczna* (S^1, d) *oraz nierozszerzający operator Fellera* P*. Załóżmy, że dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje takie* $\alpha > 0$*, że dla dowolnych miar probabilistycznych* $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(\mathrm{S}^1)$ *istnieją* $n_0 \in \mathbb{N}$ *oraz zbiór mierzalny* $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S}^1)$ *o własności* $|A| \leqslant \varepsilon$ *takie, że*

$$P^{n_0}\mu_1(A) \geqslant \alpha \quad \textit{oraz} \quad P^{n_0}\mu_2(A) \geqslant \alpha. \tag{3.3.3}$$

Wtedy operator P *jest asymptotycznie stabilny.*

Niech P będzie operatorem Fellera odpowiadającym stochastycznemu układowi dynamicznemu (S^1, G, ν). Zauważmy, że operator P jest nierozszerzający, zgodnie z uwagą 3.5. Nierozszerzalność operatora P otrzymujemy w dowodzie twierdzenia 3.3 przy nowej metryce χ, w której długość S^1 może już nie być równa 1. Ponieważ wnioskowanie wymagałoby jedynie skalowania, bez strat ogólności przyjmijmy, że długość okręgu wynosi 1 także w metryce χ.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Podzielmy okrąg S^1 na N odcinków, $I_1, \ldots, I_N$, z czego każdy o długości $\varepsilon/4$ (jeśli potrzeba, ε możemy pomniejszyć, aby $N = 4/\varepsilon$ było całkowite). Oznaczmy ten podział jako $\mathcal{P} := \{I_1, \ldots, I_N\}$. Bez strat ogólności wybierzmy I_1 oraz I_2. Ponieważ G działa minimalnie, znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ oraz ciągi losowe $\omega'_{n_0} := (g_{\lambda'_1}, g_{\lambda'_2}, \ldots, g_{\lambda'_{n_0}})$, $\omega''_{n_0} := (g_{\lambda''_1}, g_{\lambda''_2}, \ldots, g_{\lambda''_{n_0}}) \in G^{n_0}$ takie, że

$$g_{\lambda'_{n_0}} \circ \cdots \circ g_{\lambda'_1}(I_1) \cap g_{\lambda''_{n_0}} \circ \cdots \circ g_{\lambda''_1}(I_2) \neq \emptyset. \tag{3.3.4}$$

Przyjmijmy oznaczenia: $g_{\omega'_{n_0}} := g_{\lambda'_{n_0}} \circ \cdots \circ g_{\lambda'_1}$ oraz $g_{\omega''_{n_0}} := g_{\lambda''_{n_0}} \circ \cdots \circ g_{\lambda''_1}$. Zachodzi

$$|g_{\omega'_{n_0}}(I_1) \cup g_{\omega''_{n_0}}(I_2)| \leqslant \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2.$$

Zauważmy ponadto, że dowolnie blisko każdego z ciągów ω'_{n_0} i ω''_{n_0} znajdziemy inne ciągi spełniające własność (3.3.4). Zatem

$$(\nu^{\otimes n_0} \otimes \nu^{\otimes n_0})\Big((\omega'_{n_0}, \omega''_{n_0}) \in G^{n_0} \times G^{n_0} : |g_{\omega'_{n_0}}(I_1) \cup g_{\omega''_{n_0}}(I_2)| \leqslant \varepsilon\Big) \geqslant \delta_{I_1, I_2} \tag{3.3.5}$$

dla pewnego $\delta_{I_1,I_2} > 0$. Dla każdej pary odcinków $I_k, I_l \in \mathcal{P}$ znajdziemy takie δ_{I_k,I_l}, aby spełniona była nierówność (3.3.5). Ponieważ podział $\mathcal{P}$ jest skończony, możemy określić $\delta := \min\{\delta_{I_k,I_l} : I_k, I_l \in \mathcal{P}\} > 0$.

Weźmy dowolne dwie miary $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(\mathrm{S}^1)$. Dla każdej z tych miar znajdziemy odcinek podziału $\mathcal{P}$ o mierze większej lub równej $1/N$. Bez strat ogólności, niech to będą odcinki odpowiednio I_1 oraz I_2.

Połóżmy $\alpha := \delta/N$ oraz niech $A := g_{\omega'_{n_0}}(I_1) \cup g_{\omega''_{n_0}}(I_2)$, gdzie $|A| \leqslant \varepsilon$. Wtedy dla każdego $i \in \{1, 2\}$

$$P^{n_0}\mu_i(A) = \underset{G^{n_0}}{\int \cdots \int} \mu_i(g_{\omega_{n_0}}^{-1}(A))\nu^{\otimes n_0}(\mathrm{d}\omega_{n_0}) \geqslant 1/N \cdot \delta = \alpha.$$

Spełnione są zatem założenia twierdzenia 3.6, a więc operator P jest asymptotycznie stabilny, czyli zachodzi zbieżność (3.3.1) do jedynej miary niezmienniczej μ_*.

Rozdział 4

Twierdzenia graniczne na okręgu

W następującej części przyjrzymy się bliżej własnościom spaceru losowego zdefiniowanego na Homeo(S^1), a dokładniej zachowaniom granicznym łańcucha Markowa, odpowiadającego temu spacerowi losowemu. Udowodnimy centralne twierdzenie graniczne oraz prawo iterowanego logarytmu zarówno dla łańcucha startującego z rozkładu stacjonarnego, jak i z dowolnego punktu na okręgu. W pracy nie dowodzimy mocnego prawa wielkich liczb, ponieważ wynika ono z ogólnych własności łańcuchów Markowa na przestrzeniach zwartych (zobacz wyniki Breimana w [6]), a ponadto dowód można przeprowadzić analogicznie, jak w pracy [38, Proposition 16], korzystając z twierdzenia ergodycznego Birkhoffa.

Dowód centralnego twierdzenia granicznego opiera się na wyniku Y. Derrienica i M. Lina ([11]), który uogólnia metodę aproksymacji martyngałowej M.I. Gordina i B.A. Lifšica ([14]), oraz na podejściu zaproponowanym przez M. Maxwella i M. Woodroofe'a dla ergodycznych stacjonarnych łańcuchów Markowa ([32]). Te wyniki pozwalają przy naszych założeniach udowodnić centralne twierdzenie graniczne dla łańcucha Markowa startującego z μ_*–prawie każdego punktu, gdzie μ_* oznacza jedyną miarę niezmienniczą. Dzięki temu, że układ działa minimalnie, otrzymujemy centralne twierdzenie graniczne dla łańcucha Markowa o dowolnym punkcie startowym na okręgu (ang. *quenched central limit theorem*).

W ostatnich latach centralne twierdzenie graniczne zostało dowiedzione dla różnych niestacjonarnych procesów Markowa w [8, 16, 24, 25, 39]. Więcej informacji można znaleźć w książce T. Komorowskiego et al. [21], gdzie opisane zostały szczegóły ostatnich osiągnięć. Opracowane zostało także podejście dla martyngałów. Rozwinęli je Kozlov ([22]), a także Kipnis i Varadhan ([20]), niezależnie proponując ogólną metodę dowiedzenia centralnego twierdzenia granicznego dla addytywnych funkcjonałów łańcuchów Markowa.

Z kolei O. Zhao i M. Woodroofe sformułowali w [42] warunki wystarczające do tego, aby zachodziło prawo iterowanego logarytmu dla stacjonarnych łańcuchów Markowa. Korzystając ze wspomnianych rezultatów D. Maliceta ([31]), mówiących, że losowe iteracje zwężają małe przedziały z prawdopodobieństwem 1, otrzymujemy prawo iterowanego logarytmu dla łańcucha Markowa startującego z dowolnego punktu na okręgu.

4.1 Spacer losowy i łańcuch Markowa na okręgu

Niech (S^1, G, ν) będzie stochastycznym układem dynamicznym, przy czym $(G, \circ)$ niech będzie topologiczną półgrupą homeomorfizmów okręgu. Przypomnijmy, że (lewostronny) *spacer losowy* generowany przez ten układ rozumiemy jako losowy ciąg $\omega \mapsto (g_\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów G zdefiniowany na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathbb{P}) = (G^{\mathbb{N}}, \nu^{\otimes\mathbb{N}})$, gdzie dla $\omega = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ oraz $n \in \mathbb{N}$ przyjmujemy

$$g_\omega^n := g_n \circ \cdots \circ g_1.$$

Od dawna badanie własności tego typu spacerów losowych jest atrakcyjną gałęzią analizy stochastycznej (patrz [10, 31, 33]). W szczególności D. Malicet, we wspominanej już pracy [31], wykazał, że badane spacery losowe przy raczej mało restrykcyjnych założeniach zwężają z prawdopodobieństwem 1 odpowiednio małe przedziały.

W pracy prezentujemy badania nad centralnym twierdzeniem granicznym oraz prawem iterowanego logarytmu dla odpowiedniego łańcucha Markowa startującego zarówno z rozkładu stacjonarnego, jak i z dowolnego punktu na okręgu.

Będziemy badali twierdzenia graniczne dla łańcucha Markowa $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ o prawdopodobieństwie przejścia $\pi : \mathrm{S}^1 \times \mathcal{B}(\mathrm{S}^1) \to [0, 1]$ postaci $\pi(x, A) = P\delta_x(A)$, gdzie $P : \mathcal{M}(\mathrm{S}^1) \to \mathcal{M}(\mathrm{S}^1)$ jest operatorem Markowa (odpowiadającym spacerowi losowemu $\omega \mapsto (g_\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$) danym w postaci

$$\forall_{\mu\in\mathcal{M}(\mathrm{S}^1)} \forall_{A\in\mathcal{B}(\mathrm{S}^1)} \; P\mu(A) = \int_G \mu(g^{-1}(A))\nu(\mathrm{d}g).$$

Jak w poprzednim rozdziale, P jest operatorem Fellera i jest dualny do operatora U postaci

$$\forall_{f\in B(\mathrm{S}^1)} \forall_{x\in\mathrm{S}^1} \; Uf(x) = \int_G f(g(x))\nu(\mathrm{d}g),$$

gdzie, przypomnijmy, $B(\mathrm{S}^1)$ oznacza zbiór wszystkich ograniczonych funkcji borelowskich na S^1.

Rozkład łańcucha Markowa $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ o początkowym rozkładzie ν zadany jest przez miarę probabilistyczną $\mathbb{P}_\nu$ na przestrzeni mierzalnej $\left((\mathrm{S}^1)^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathrm{S}^1)^{\otimes\mathbb{N}}\right)$ taką, że

$$\mathbb{P}_\nu[X_{n+1} \in A | X_n = x] = \pi(x, A) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}_\nu[X_0 \in A] = \nu(A),$$

gdzie $x \in \mathrm{S}^1$ oraz $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S}^1)$. Istnienie $\mathbb{P}_\nu$ wynika z twierdzenia Kołmogorowa o istnieniu procesu (zobacz [4]). Jeśli rozkład początkowy ν jest równy mierze niezmienniczej lub ergodycznej operatora P (o ile taka miara istnieje), łańcuch Markowa nazywamy odpowiednio stacjonarnym lub ergodycznym. Wartość oczekiwaną względem $\mathbb{P}_\mu$ oznaczamy $\mathbb{E}_\mu$.

Zauważmy, że jeżeli łańcuch Markowa startuje z punktu $x \in \mathrm{S}^1$, czyli $X_0 = x$, to wtedy $X_n(\omega) = g^n_\omega(x)$. Rozkład odpowiadający takiemu łańcuchowi oznaczamy $\mathbb{P}_x := \mathbb{P}_{\delta_x}$, gdzie δ_x jest miarą Diraca w $x \in \mathrm{S}^1$.

Ponadto można zauważyć, że $\mathbb{P}_\mu(\cdot) = \int_{\mathrm{S}^1} \mathbb{P}_x(\cdot)\mu(\mathrm{d}x)$ oraz $\mathbb{E}_\mu(\cdot) = \int_{\mathrm{S}^1} \mathbb{E}_x(\cdot)\mu(\mathrm{d}x)$. Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathrm{S}^1)$ mamy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x((X_1, \ldots, X_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n) = \\
&= \int_{G^{\mathbb{N}}} \mathbb{1}_{A_1 \times \cdots \times A_n}(g^1_\omega(x), \ldots, g^n_\omega(x))\nu^{\otimes \mathbb{N}}(\mathrm{d}\omega) = \\
&= (\delta_x \otimes \mathbb{P})((y,\omega) : (g^1_\omega(y), \ldots, g^n_\omega(y)) \in A_1 \times \cdots \times A_n) = \\
&= \underset{G^n}{\int \cdots \int} \mathbb{1}_{A_1 \times \cdots \times A_n}(g_1(x), \ldots, g_n \circ \cdots \circ g_1(x))\nu(\mathrm{d}g_1) \cdots \nu(\mathrm{d}g_n).
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Zatem

$$\mathbb{E}_x(H(X_1, \ldots, X_n)) = \underset{G^n}{\int \cdots \int} H(g_1(x), \ldots, g_n \circ \cdots \circ g_1(x))\nu(\mathrm{d}g_1) \cdots \nu(\mathrm{d}g_n) \tag{4.1.2}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\mu(H(X_1, \ldots, X_n)) = \\
&= \int_{\mathrm{S}^1} \underset{G^n}{\int \cdots \int} H(g_1(x), \ldots, g_n \circ \cdots \circ g_1(x))\nu(\mathrm{d}g_1) \cdots \nu(\mathrm{d}g_n)\mu(\mathrm{d}x)
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

dla dowolnej ograniczonej funkcji borelowskiej $H : (\mathrm{S}^1)^n \to \mathbb{C}$.

Spacer losowy $\omega \mapsto (g^n_\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy *niezdegenerowanym* na G, jeśli każdy otwarty podzbiór G posiada dodatnie prawdopodobieństwo osiągnięcia przez ten spacer losowy. Innymi słowy G jest jednocześnie swoją najmniejszą pod-półgrupą zawierającą $\operatorname{supp} \nu$. Dowolny spacer losowy na $\mathrm{Homeo}(\mathrm{S}^1)$ jest niezdegenerowany na pewnej półgrupie. Mówimy, że niezdegenerowany spacer losowy $\omega \mapsto (g^n_\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ na G *nie posiada niezmienniczej miary probabilistycznej* na S^1, jeśli nie istnieje miara probabilistyczna niezmiennicza względem każdego elementu G (czyli nie istnieje miara μ taka, że $\mu(A) = \mu(g^{-1}(A))$ dla każdego $g \in G$ i zbioru mierzalnego $A \subset \mathrm{S}^1$).

Będzie mówili, że spacer losowy generowany przez (S^1, G, ν) *działa minimalnie*, kiedy G działa minimalnie.

D. Malicet w pracy [31] udowodnił następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1 (Malicet, [31, Theorem C, Corollary 2.6])**.** *Niech* $\omega \mapsto (g_\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie niezdegenerowanym spacerem losowym na półgrupie* G *grupy* $\mathrm{Homeo}(\mathrm{S}^1)$*, działającym minimalnie na* S^1 *i nie posiadającym niezmienniczej miary probabilistycznej na* S^1*. Wtedy dla każdego* $x \in \mathrm{S}^1$ *zachodzi słaba zbieżność*

$$P^n\delta_x \xrightarrow[n\to\infty]{słabo} \mu_*,$$

gdzie $\mu_* \in \mathcal{M}_1(\mathrm{S}^1)$ *jest jedyną miarą stacjonarną (niezmienniczą) dla* P*. Co więcej, zbieżność ta jest jednostajna, co oznacza, że dla dowolnej funkcji* $\varphi \in C(\mathrm{S}^1)$

$$\sup_{x\in\mathrm{S}^1}\left|\int\limits_{\mathrm{S}^1}\varphi\mathrm{d}\left(P^n\delta_x\right) - \int\limits_{\mathrm{S}^1}\varphi\mathrm{d}\mu_*\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.1.4}$$

4.2 Lematy pomocnicze

W dowodzie centralnego twierdzenia granicznego oraz prawa iterowanego logarytmu kluczową rolę pełnić będzie wyrażenie

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{x,y\in\mathrm{S}^1}\left|\sum_{i=1}^n U^i\varphi(x) - \sum_{i=1}^n U^i\varphi(y)\right|, \tag{4.2.1}$$

gdzie $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją Lipschitza. Pokażemy, że wyrażenie (4.2.1) jest ograniczone.

Przypomnijmy jeszcze, że średnicę przedziału J na okręgu oznaczamy przez $|J|$ i definiujemy jako

$$|J| = \sup_{x,y\in J} d(x,y).$$

Na początku przytoczmy wynik D. Maliceta.

Lemat 4.2 (Malicet, [31, Theorem A])**.** *Przy założeniach twierdzenia 4.1 dla każdego* $x_* \in \mathrm{S}^1$ *i dla* $\mathbb{P}$–p. w. $\omega \in \Omega$ *istnieje otoczenie* I *punktu* x_* *takie, że*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |g_\omega^n(I)| \leqslant q^n,$$

gdzie $q \in (0,1)$ *zależy tylko od spaceru losowego* $\omega \mapsto (g_\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Z twierdzenia 4.1 łatwo wynika następujący wniosek.

Wniosek 4.3. *Przy założeniach twierdzenia 4.1 dla dowolnych przedziałów otwartych* $I_0, I \subset \mathrm{S}^1$*, gdzie* $\overline{I_0} \subset I$*, istnieje* $K \in \mathbb{N}$ *takie, że dla każdego* $x \in \mathrm{S}^1$

$$P^K\delta_x(I) \geqslant \frac{\mu_*(I_0)}{2}.$$

Dowód. Ustalmy dodatnią, ciągłą i ograniczoną przez 1 funkcję φ taką, że $\mathrm{supp}\,\varphi \subset I$ oraz $\varphi(x) = 1$ dla każdego $x \in I_0$. Zastosowanie (4.1.4) kończy dowód. □

Z drugiej strony, z lematu 4.2 mamy:

Wniosek 4.4. *Niech spełnione będą założenia twierdzenia 4.1 i niech* $x_* \in \mathrm{S}^1$. *Wtedy istnieją: otoczenie* I *punktu* x_*, *zbiór* $\Omega_0 \subset \Omega$, *spełniający* $\mathbb{P}(\Omega_0) > 0$, *oraz pewna stała* $q \in (0,1)$, *takie, że dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\omega \in \Omega_0$

$$|g_\omega^n(I)| \leqslant q^n.$$

Ponadto $\mathbb{P}(\Omega_0) \to 1$ *przy* $|I| \to 0$.

Następujący lemat jest kluczowy dla dalszych rozważań.

Lemat 4.5. *Niech spełnione będą założenia twierdzenia 4.1 i niech* $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją Lipschitza. Wtedy istnieje stała* $C > 0$ *taka, że dla dowolnych* $x, y \in \mathrm{S}^1$ *oraz dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} U^i\varphi(x) - \sum_{i=1}^{n} U^i\varphi(y) \right| \leqslant C.$$

Dowód. Niech $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją Lipschitza ze stałą Lipschitza L. Definiujemy

$$a_n := \sup_{x,y\in \mathrm{S}^1} \sup_{m \leqslant n} \left| \sum_{i=1}^{m} U^i\varphi(x) - \sum_{i=1}^{m} U^i\varphi(y) \right|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście $a_n \leqslant 2n\|\varphi\|$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Niech μ_* będzie jedyną miarą stacjonarną (niezmienniczą) dla P. Korzystając z wniosku 4.4, wybieramy otoczenie I pewnego punktu $x_* \in \operatorname{supp} \mu_*$, $q \in (0,1)$ oraz $\Omega_0 \subset \Omega$, dla którego $\alpha := \mathbb{P}(\Omega_0) > 0$, takie, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $\omega \in \Omega_0$ mamy

$$|g_\omega^n(I)| \leqslant q^n.$$

Niech $I_0 \subset I$ będzie otwartym otoczeniem punktu x_* takim, że $\overline{I_0} \subset I$, i niech $\beta := \mu_*(I_0)/2$. Oczywiście $\beta > 0$, ponieważ $x_* \in \operatorname{supp} \mu_*$.

Wybierzmy $K \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $x \in \mathrm{S}^1$

$$P^K\delta_x(I) \geqslant \beta,$$

z wniosku 4.3. Dla każdego $x \in \mathrm{S}^1$ możemy zapisać

$$P^K\delta_x = \beta\mu_x + (1-\beta)\mu^x, \tag{4.2.2}$$

gdzie $\mu_x, \mu^x \in \mathcal{M}_1(\mathrm{S}^1)$ oraz $\operatorname{supp} \mu_x \subset I$. W istocie, wystarczy zdefiniować miarę

$$\mu_x(A) := \frac{P^K\delta_x(A \cap I)}{P^K\delta_x(I)}$$

oraz określić μ^x wzorem

$$\forall_{A\in\mathcal{B}(\mathrm{S}^1)}\ \mu^x(A) = \frac{1}{1-\beta}(P^K\delta_x(A) - \beta\mu_x(A)).$$

Oczywiście $\mu_x \in \mathcal{M}_1(\mathrm{S}^1)$ oraz $\operatorname{supp}\mu_x \subset I$. Ponieważ dla wszystkich $A \in \mathcal{B}(\mathrm{S}^1)$ zachodzi

$$P^K\delta_x(A) \geqslant P^K\delta_x(A\cap I) = P^K\delta_x(I)\mu_x(A) \geqslant \beta\mu_x(A)$$

to miara μ^x jest nieujemna i w konsekwencji $\mu^x \in \mathcal{M}(\mathrm{S}^1)$.

Dla $m > K$, korzystając z (4.2.2), mamy

$$\begin{aligned}\sum_{i=K+1}^{m} U^i\varphi(x) &= \int_{\mathrm{S}^1}\sum_{i=1}^{m-K} U^i\varphi(z)P^K\delta_x(\mathrm{d}z) = \\ &= \beta\cdot\int_{\mathrm{S}^1}\sum_{i=1}^{m-K} U^i\varphi(z)\mu_x(\mathrm{d}z) + (1-\beta)\cdot\int_{\mathrm{S}^1}\sum_{i=1}^{m-K} U^i\varphi(z)\mu^x(\mathrm{d}z).\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

W dalszej części będziemy używać następującej notacji. Przez Ω_0^n określamy projekcję Ω_0 na G^n, przy $n\in\mathbb{N}$, czyli

$$\Omega_0^n := \left\{(\omega_1,\dots,\omega_n)\in G^n : (\omega_1,\dots,\omega_n)\times G^{\mathbb{N}}\cap\Omega_0 \neq \emptyset\right\}.$$

Oszacujemy teraz wyrażenie

$$\left|\sum_{i=1}^{n} U^i\varphi(z) - \sum_{i=1}^{n} U^i\varphi(w)\right|$$

dla dowolnych $z, w \in I$. Dla $\mathbf{g} = (g_1,\dots,g_m)\in G^m$, $m \geqslant 1$ połóżmy

$$S_m(z,w;\mathbf{g}) := \sum_{i=1}^{m}\Big(\varphi(g_i\circ\dots\circ g_1(z)) - \varphi(g_i\circ\dots\circ g_1(w))\Big).$$

Dla $r \leqslant n$ mamy

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{r}\Big(U^i\varphi(z) - U^i\varphi(w)\Big)\right| &= \left|\int\cdots\int_{G^r} S_r(z,w;\mathbf{g})\nu^{\otimes r}(\mathrm{d}\mathbf{g})\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\int\cdots\int_{\Omega_0^r} S_r(z,w;\mathbf{g})\nu^{\otimes r}(\mathrm{d}\mathbf{g})\right| + \left|\int\cdots\int_{G^r\setminus\Omega_0^r} S_r(z,w;\mathbf{g})\nu^{\otimes r}(\mathrm{d}\mathbf{g})\right| =: \mathrm{I}+\mathrm{II}.\end{aligned}$$

Najpierw oszacujemy całkę II. Dla $k \leqslant r$ zdefiniujmy

$$G_k^r := \left\{(\omega_1,\dots,\omega_r)\in G^r : (\omega_1,\dots,\omega_{k-1})\in\Omega_0^{k-1}, (\omega_1,\dots,\omega_k)\notin\Omega_0^k\right\}.$$

Zbiór G_k^r zawiera wszystkie ciągi posiadające pierwsze $k-1$ elementów z pewnego ciągu z Ω_0, lecz różniące się z nim na k-tym miejscu. Zauważmy, że $G^r\setminus\Omega_0^r = \bigcup_{k=1}^{r} G_k^r$

oraz $G_i^r \cap G_j^r = \emptyset$ przy $i \neq j$. Łatwo widać, że $\nu^{\otimes r}(G^r \setminus \Omega_0^r) \leqslant \mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_0) = 1 - \mathbb{P}(\Omega_0) = 1 - \alpha$.

Dalej niech $G_{k|k}^r$ będzie projekcją G_k^r na k pierwszych współrzędnych, czyli

$$G_{k|k}^r := \left\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in G^k : \exists (\omega_1, \ldots, \omega_k, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_r) \in G_k^r \right\}.$$

Wtedy widzimy, że $G_k^r = G_{k|k}^r \times G^{r-k}$ oraz ponieważ zbiory G_k^r dla $k \in \{1, \ldots, r\}$ są rozłączne, to

$$\mathrm{II} = \left| \int_{\bigcup_{k=1}^{r} G_k^r} \cdots \int S_r(z, w; \mathbf{g}) \nu^{\otimes r}(\mathrm{d}\mathbf{g}) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{r} \left| \int_{G_k^r} \cdots \int S_r(z, w; \mathbf{g}) \nu^{\otimes r}(\mathrm{d}\mathbf{g}) \right|.$$

Rozważmy pojedynczy składnik powyższej sumy. Dla $k \in \{1, \ldots r\}$ z twierdzenia Fubiniego

$$\begin{aligned} &\int_{G_k^r} \cdots \int S_r(z, w; \mathbf{g}) \nu^{\otimes r}(\mathrm{d}\mathbf{g}) = \\ &= \int_{G_{k|k}^r} \cdots \int \left(\int_{G^{r-k}} \cdots \int S_r(z, w; \mathbf{g}) \nu(\mathrm{d}g_{k+1}) \cdots \nu(\mathrm{d}g_r) \right) \nu(\mathrm{d}g_1) \cdots \nu(\mathrm{d}g_k). \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Aby oszacować wewnętrzne całki, ustalmy $\hat{\mathbf{g}} = (g_1, \ldots, g_k)$ oraz $\breve{\mathbf{g}} = (g_{k+1}, \ldots, g_r)$. Ponadto niech $\breve{z} := g_k \circ \cdots \circ g_1(z)$ oraz $\breve{w} := g_k \circ \cdots \circ g_1(w)$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} &\int_{G^{r-k}} \cdots \int S_r(z, w; \mathbf{g}) \nu^{\otimes (r-k)}(\mathrm{d}\breve{\mathbf{g}}) = \\ &= \int_{G^{r-k}} \cdots \int \left(S_k(z, w; \hat{\mathbf{g}}) + S_{r-k-1}(\breve{z}, \breve{w}; \breve{\mathbf{g}})\right) \nu(\mathrm{d}g_{k+1}) \cdots \nu(\mathrm{d}g_r) = \\ &= S_k(z, w; \hat{\mathbf{g}}) + \int_{G^{r-k}} \cdots \int S_{r-k-1}(\breve{z}, \breve{w}; \breve{\mathbf{g}}) \nu(\mathrm{d}g_{k+1}) \cdots \nu(\mathrm{d}g_r) \end{aligned}$$

i w konsekwencji

$$\begin{aligned} &\left| \int_{G_k^r} \cdots \int S_r(z, w; \mathbf{g}) \nu^{\otimes r}(\mathrm{d}\mathbf{g}) \right| = \\ &= \left| \int_{G_{k|k}^r} \cdots \int \left(S_k(z, w; \hat{\mathbf{g}}) + \int_{G^{r-k}} \cdots \int S_{r-k}(\breve{z}, \breve{w}; \breve{\mathbf{g}}) \nu^{\otimes (r-k)}(\mathrm{d}\breve{\mathbf{g}}) \right) \nu^{\otimes k}(\mathrm{d}\hat{\mathbf{g}}) \right| \leqslant \\ &\leqslant \int_{G_{k|k}^r} \cdots \int (|S_k(z, w; \hat{\mathbf{g}})| + a_{r-k}) \nu^{\otimes k}(\mathrm{d}\breve{\mathbf{g}}) \leqslant \int_{G_{k|k}^r} \cdots \int (|S_k(z, w; \hat{\mathbf{g}})| + a_n) \nu^{\otimes k}(\mathrm{d}\breve{\mathbf{g}}) \leqslant \\ &\leqslant \left(L(1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1}) + a_n \right) \nu^{\otimes k}\left(G_{k|k}^r\right) \leqslant \left(\frac{L}{1-q} + a_n \right) \nu^{\otimes k}\left(G_{k|k}^r\right). \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathrm{II} \leqslant \sum_{k=1}^{r} \left| \int_{G_k^r} \cdots \int S_r(z,w;\mathbf{g}) \nu^{\otimes r}(\mathrm{d}\mathbf{g}) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{L}{1-q} + a_n \right) \nu^{\otimes k} \left(G_{k|k}^r \right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L}{1-q} + a_n \cdot \sum_{k=1}^{r} \nu^{\otimes k} \left(G_{k|k}^r \right) \leqslant \frac{L}{1-q} + a_n \cdot (1-\alpha).$$

Z drugiej strony całkę I możemy łatwo oszacować przy pomocy wniosku 4.4. Rzeczywiście

$$\mathrm{I} = \left| \int_{\Omega_0^r} \cdots \int S_r(z,w;\mathbf{g}) \nu^{\otimes r}(\mathrm{d}\mathbf{g}) \right| \leqslant L\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{r-1}\right) \leqslant \frac{L}{1-q}.$$

Stąd dla $z, w \in I$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} U^i \varphi(z) - \sum_{i=1}^{n} U^i \varphi(w) \right| \leqslant \mathrm{I} + \mathrm{II} \leqslant \frac{2L}{1-q} + a_n(1-\alpha).$$

Zatem dla $n \geqslant m > K$

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^{m} (U^i \varphi(x) - U^i \varphi(y)) \right| \leqslant \\ &\leqslant \beta \cdot \iint_{\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1} \left| \sum_{i=1}^{m-K} (U^i \varphi(z) - U^i \varphi(w)) \right| \mu_x(\mathrm{d}z) \mu_y(\mathrm{d}w) + \\ &+ (1-\beta) \cdot \iint_{\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1} \left| \sum_{i=1}^{m-K} (U^i \varphi(z) - U^i \varphi(w)) \right| \mu^x(\mathrm{d}z) \mu^y(\mathrm{d}w) \leqslant \\ &\leqslant \beta \cdot \left(\frac{2L}{1-q} + a_m(1-\alpha) \right) + (1-\beta) \cdot a_m \leqslant \\ &\leqslant \frac{2\beta L}{1-q} + a_m(1-\beta\alpha) \leqslant \frac{2\beta L}{1-q} + a_n(1-\beta\alpha), \end{aligned}$$

ponieważ $\operatorname{supp} \mu_x$ i $\operatorname{supp} \mu_y$ zawierają się w I. Oczywiście dla $m \leqslant K$ mamy

$$\left| \sum_{i=1}^{m} (U^i \varphi(x) - U^i \varphi(y)) \right| \leqslant 2K \|\varphi\|.$$

Stąd otrzymujemy

$$\sup_{m \leqslant n} \left| \sum_{i=1}^{m} U^i \varphi(x) - \sum_{i=1}^{m} U^i \varphi(y) \right| \leqslant \frac{2\beta L}{1-q} + 2K\|\varphi\| + a_n(1-\beta\alpha),$$

a ponieważ $x, y \in \mathrm{S}^1$ były dowolne, dostajemy

$$a_n \leqslant \frac{2\beta L}{1-q} + 2K\|\varphi\| + a_n(1-\beta\alpha).$$

Stąd

$$a_n \leqslant \frac{2L}{\alpha(1-q)} + \frac{2K\|\varphi\|}{\beta\alpha} =: C \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N},$$

co kończy dowód. □

Lemat 4.5 pełni kluczową rolę w dowodzie centralnego twierdzenia granicznego oraz prawa iterowanego logarytmu dla zadanego procesu stochastycznego. Istotną cechą w dowodzie jest fakt, że jeżeli odległość między iteracjami dwóch różnych punktów, x i y, zbiega do 0, to cały odcinek $[x, y]$ się zwęża. Lemat mógłby zostać sformułowany także dla losowych odwzorowań odcinka, jednak ten przypadek został już w pełni zanalizowany w pracach [8] i [9].

Jak już zostało wspomniane, do dowodu centralnego twierdzenia granicznego korzystamy z wyników Derrienica i Lina w [11]. Zauważmy jednak, że z przeprowadzonych do tej pory rozważań wynika dodatkowo zależność opisana w poniższym twierdzeniu. Na jej podstawie także można wykazać centralne twierdzenie graniczne, korzystając wtedy z wyników Gordina i Lifšica w [14] (zobacz [30, Theorem 10]).

Twierdzenie 4.6. *Niech spełnione będą założenia twierdzenia 4.1 i niech $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją Lipschitza. Wtedy funkcja φ jest $L^2(\mu_*)$ – kobrzegiem, czyli $\varphi \in (I - U)L^2(\mu_*)$.*

Dowód. Ustalmy funkcję Lipschitza $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$. Bez strat ogólności przyjmijmy, że stała Lipschitza funkcji φ jest równa 1. Niech $C > 0$ będzie takie, że $|\sum_{i=0}^n U^i\varphi(x) - \sum_{i=0}^n U^i\varphi(y)| \leqslant C$ dla dowolnych $x, y \in \mathrm{S}^1$ oraz $n \in \mathbb{N}$, zgodnie z lematem 4.5. Mamy

$$\left|\sum_{i=0}^n U^i\varphi(x)\right| = \left|\sum_{i=0}^n \left(U^i\varphi(x) - \int_{\mathrm{S}^1} U^i\varphi(z)\mu_*(\mathrm{d}z)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathrm{S}^1} \left|\sum_{i=0}^n U^i\varphi(x) - \sum_{i=0}^n U^i\varphi(z)\right| \mu_*(\mathrm{d}z) \leqslant C.$$

Z twierdzenia w [7, Theorem 2] wynika, że istnieje $\psi \in L^2(\mu_*)$ takie, że $\varphi = \psi - U\psi$, co kończy dowód. □

Uwaga 4.7. Operator P, dualny do U, posiada jedyną miarę ergodyczną μ_* oraz $\operatorname{supp}\mu_* = \mathrm{S}^1$, a więc funkcja ψ w powyższym dowodzie należy do $C(\mathrm{S}^1)$, zgodnie z wynikami Schwartza w [36].

4.3 Centralne Twierdzenie Graniczne

W następującym rozumowaniu skorzystamy z wyników Y. Derrienica oraz M. Lina (zobacz [11]), którzy podali warunki dostateczne dla centralnego twierdzenia granicznego dla procesu startującego z μ_*–prawie każdego punktu x.

Twierdzenie 4.8 (Derrienic-Lin, [11, Theorem])**.** *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ będzie stacjonarnym i ergodycznym łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $(S, \mathcal{S}, \mu)$. Niech $\varphi \in$*

$L^2(\mu)$ oraz $\int \varphi(x)\mu(\mathrm{d}x) = 0$. Określmy $S_n(\varphi) := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(X_k)$. Jeżeli istnieje stała $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ taka, że $\left\|\sum_{k=2}^{n-1} U^k\varphi\right\|_{L^2(\mu)} = O(n^\alpha)$, to wtedy $\sigma^2(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_\mu}\left(S_n(\varphi)^2\right)$ istnieje i jest skończona. Jednocześnie dla μ-prawie wszystkich $x \in S$ ciąg $\frac{S_n(\varphi)}{\sqrt{n}}$ zbiega słabo względem miary $\mathbb{P}_x$ do rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, \sigma^2(\varphi))$, chyba że $\sigma^2(\varphi) = 0$ — wtedy otrzymujemy miarę Diraca w 0.

Twierdzenie 4.9. *Niech $\omega \mapsto (g_\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie niezdegenerowanym spacerem losowym na półgrupie G grupy $\mathrm{Homeo}(\mathrm{S}^1)$, działającym minimalnie na S^1 oraz nieposiadającym niezmienniczej miary probabilistycznej na S^1. Wtedy dla dowolnej funkcji Lipschitza $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$ takiej, że $\int_{\mathrm{S}^1} \varphi \mathrm{d}\mu_* = 0$, gdzie μ_* jest jedyną miarą niezmienniczą dla P, oraz dla dowolnego $x \in \mathrm{S}^1$ granica*

$$\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mu_*}} \left[\frac{\varphi(g_\omega^n(x)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(x))}{\sqrt{n}}\right]^2$$

istnieje i jest skończona. Ponadto jeśli $\sigma^2 > 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : \frac{\varphi(g_\omega^n(x)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(x))}{\sqrt{n}} < a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y \tag{4.3.1}$$

dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$ oraz $x \in \mathrm{S}^1$. Jeżeli $\sigma = 0$, to ciąg

$$\frac{\varphi(g_\omega^n(x)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(x))}{\sqrt{n}}$$

zbiega słabo do 0.

Dowód. Ustalmy funkcję Lipschitza $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$. Bez strat ogólności przyjmijmy, że stała Lipschitza funkcji φ wynosi 1. Niech $C > 0$ będzie takie, że $|\sum_{k=0}^{n-1} U^k\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} U^k\varphi(y)| \leqslant C$ dla wszystkich $x, y \in \mathrm{S}^1$ oraz $n \in \mathbb{N}$, zgodnie z lematem 4.5. Mamy

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k\varphi(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \left(U^k\varphi(x) - \int_{\mathrm{S}^1} U^k\varphi(z)\mu_*(\mathrm{d}z)\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant \int_{\mathrm{S}^1} \left|\sum_{k=0}^{n-1} U^k\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} U^k\varphi(z)\right| \mu_*(\mathrm{d}z) \leqslant C.\end{aligned}$$

W szczególności $\|\sum_{k=0}^{n-1} U^k\varphi\| = O(n^\alpha)$ dla $0 < \alpha < 1/2$. Z twierdzenia 4.8 wynika, że σ^2 istnieje i jest skończona, zaś wyrażenie (4.3.1) zachodzi dla μ_*–p. w. $x \in \mathrm{S}^1$. W szczególności dla μ_*–p. w. $x \in \mathrm{S}^1$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \exp\left(it\frac{\varphi(g_\omega^n(x)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(x))}{\sqrt{n}}\right) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma^2\right) \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ustalmy $y \in \mathrm{S}^1$ oraz $\varepsilon > 0$. Z lematu 4.2 (zobacz także wniosek 4.4) istnieją: otoczenie I punktu y oraz $\Omega_0 \subset \Omega$, dla którego $\mathbb{P}(\Omega_0) > 1 - \varepsilon/4$, takie, że

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{\omega\in\Omega_0}\ |g_\omega^n(I)| \leqslant q^n$$

dla pewnego $q \in (0,1)$. Ponieważ $\omega \mapsto (g^n_\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ działa minimalnie, otrzymujemy $\mu_*(I) > 0$. Możemy więc wybrać $x \in I$ takie, że (4.3.1) zachodzi. Zdefiniujmy zbiór

$$\Omega_{x,y} := \{\omega \in \Omega : |g^n_\omega([x,y])| \leqslant q^n\}.$$

Wtedy dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}
&\Bigg| \int_\Omega \exp\left(it\frac{\varphi(g^n_\omega(x)) + \cdots + \varphi(g^1_\omega(x))}{\sqrt{n}} \right) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) + \\
&\quad - \int_\Omega \exp\left(it\frac{\varphi(g^n_\omega(y)) + \cdots + \varphi(g^1_\omega(y))}{\sqrt{n}} \right) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \Bigg| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{|t|}{\sqrt{n}} \int_{\Omega_0} \sum_{k=1}^n d\left(g^k_\omega(x), g^k_\omega(y)\right) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) + 2(1 - \mathbb{P}(\Omega_{x,y})) \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{|t|}{\sqrt{n}} \left(q + q^2 + \cdots + q^n\right) + 2(1 - \mathbb{P}(\Omega_0)) \leqslant \frac{|t|}{\sqrt{n}} q(1-q)^{-1} + \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Zatem, ponieważ warunek (4.3.1) jest spełniony, ostatecznie dostajemy

$$\limsup_{n\to\infty} \left| e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} - \int_\Omega \exp\left(it\frac{\varphi(g^n_\omega(y)) + \cdots + \varphi(g^1_\omega(y))}{\sqrt{n}} \right) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \right| < \varepsilon.$$

Ponieważ $\varepsilon > 0$ był dowolny, dowód jest skończony. □

4.4 Prawo Iterowanego Logarytmu

Dowód twierdzenia opiera się na wyniku O. Zhao oraz M. Woodroofe'a (zobacz [42]), gdzie przedstawiony jest warunek wystarczający, aby dla stacjonarnego procesu Markowa zachodziło prawo iterowanego logarytmu.

Przez $\|\cdot\|_{L^2(P)}$ będziemy oznaczać normę w $L^2(P)$.

Główny wniosek dowiedziony przez Zhao i Woodroofe'a, który wykorzystamy przy naszych warunkach, brzmi następująco.

Twierdzenie 4.10 (Zhao-Woodroofe, [42, Theorem 1, Corollary 1])**.** *Niech $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ będzie scentrowanym, całkowalnym z kwadratem, stacjonarnym i ergodycznym procesem. Określmy $S_n := Y_1 + \cdots + Y_n$. Załóżmy, że $Y_k = g(\tilde{X}_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ jest stacjonarnym i ergodycznym łańcuchem Markowa. Niech $\mathcal{F}_0 = \sigma(\ldots, \tilde{X}_{-1}, \tilde{X}_0)$. Jeżeli zachodzi*

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \|\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_0)\|_{L^2(P)} < \infty, \tag{4.4.1}$$

to wtedy z prawdopodobieństwem 1

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = \sigma$$

dla pewnego $\sigma \in [0,\infty)$.

Prawo iterowanego logarytmu przy naszych założeniach przyjmuje poniższą postać.

Twierdzenie 4.11. *Niech $\omega \mapsto (g_\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie niezdegenerowanym spacerem losowym na półgrupie G grupy $\mathrm{Homeo}(\mathrm{S}^1)$, działającym minimalnie na S^1 i nieposiadającym niezmienniczej miary probabilistycznej na S^1. Wtedy dla dowolnej funkcji Lipschitza $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$ takiej, że $\int_{\mathrm{S}^1} \varphi \mathrm{d}\mu_* = 0$, gdzie μ_* jest jedyną miarą niezmienniczą dla P, oraz dla dowolnego $x \in \mathrm{S}^1$ istnieje granica górna*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(g_\omega^n(x)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(x))}{\sqrt{2n\log\log n}} = \sigma > 0 \quad \mathbb{P}\text{–p. w.}$$

Dowód. Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ będzie stacjonarnym łańcuchem Markowa odpowiadającym danemu niezdegenerowanemu spacerowi losowemu. Niech φ będzie funkcją Lipschitza spełniającą warunek $\int_{[0,1]} \varphi \mathrm{d}\mu_* = 0$ i niech $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ będzie stacjonarnym ergodycznym łańcuchem Markowa (o rozkładzie μ_*) na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ o zadanym prawdopodobieństwie przejścia P. Istnienie tego łańcucha Markowa wynika z twierdzenia Kołmogorowa o istnieniu procesu ([4]). Określmy $Y_n = \varphi(\tilde{X}_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, i zauważmy, że $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ także jest stacjonarnym łańcuchem ergodycznym. Określmy $S_n = Y_n + \cdots + Y_1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Niech $\mathcal{F}_0 = \sigma(\ldots, \tilde{X}_{-n}, \tilde{X}_{-n+1}, \ldots, \tilde{X}_{-1}, \tilde{X}_0)$.

Z lematu 4.5 wynika istnienie dodatniej stałej C takiej, że

$$\Big\| \sum_{i=1}^n U^i \varphi \Big\|_{L^2(\mu_*)} \leqslant C \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_0)\|^2_{L^2(\mu_*)} &= \int_{[0,1]} |\mathbb{E}(\varphi(\tilde{X}_n) + \cdots + \varphi(\tilde{X}_1)|X_0 = x)|^2 \mu_*(\mathrm{d}x) = \\ &= \int_{[0,1]} |U^n\varphi(x) + \cdots + U\varphi(x))|^2 \mu_*(\mathrm{d}x) = \| \sum_{j=1}^n U^j \varphi\|^2_{L^2(\mu_*)}, \end{aligned}$$

a zatem

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \Big\|\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_0)\Big\|_{L^2(\mu_*)} < \infty.$$

Z twierdzenia 4.10 wynika, że

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(\tilde{X}_1) + \cdots + \varphi(\tilde{X}_n)}{\sqrt{2n\log\log n}} = \sigma \quad \tilde{\mathbb{P}}\text{–p. w.}$$

Łańcuch $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ oraz stacjonarny łańcuch $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mają ten sam rozkład $\mathbb{P}_{\mu_*}$, dlatego

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(X_1) + \cdots + \varphi(X_n)}{\sqrt{2n\log\log n}} = \sigma \quad \mathbb{P}_{\mu_*}\text{–p. w.}$$

lub równoważnie

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(g_\omega^n(x)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(x))}{\sqrt{2n\log\log n}} = \sigma \quad \mathbb{P}\otimes\mu_*\text{–p. w.}$$

Ustalmy $x \in \mathrm{S}^1$. Z wniosku 4.4 istnieją takie otoczenie I_x punktu x oraz taki zbiór $\Omega_{I_x} \subset \Omega$, spełniający $\mathbb{P}(\Omega_{I_x}) > 0$, że

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\varphi(g_\omega^n(x)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(x))}{\sqrt{2n\log\log n}} - \frac{\varphi(g_\omega^n(y)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(y))}{\sqrt{2n\log\log n}} \right| = 0 \qquad (4.4.2)$$

dla wszystkich $\omega \in \Omega_{I_x}$ oraz $y \in I_x$. Ponadto $\mathbb{P}(\Omega_{I_x}) \to 1$ przy $|I_x| \to 0$ z wniosku 4.4. Ponieważ $\omega \mapsto (g_\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$ działa minimalnie, $\operatorname{supp}\mu_* = \mathrm{S}^1$. Stąd dla dowolnie małego otoczenia I_x punktu x istnieje takie $y \in I_x$, że

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(g_\omega^n(y)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(y))}{\sqrt{2n\log\log n}} = \sigma.$$

W konsekwencji, korzystając z (4.4.2), dostajemy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(g_\omega^n(x)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(x))}{\sqrt{2n\log\log n}} = \sigma \quad \mathbb{P}\text{–p. w.},$$

co kończy dowód. □

4.5 Przykład zastosowania twierdzeń granicznych

Rozważmy przykład z rozdziału 3.3 z niewielkimi modyfikacjami.

Niech $\Lambda = [0, 1]$ i niech $p : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ będzie gęstością prawdopodobieństwa, czyli $\int_0^1 p(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 1$. Dla każdego $\lambda \in [0, 1/2)$ definiujemy funkcję $g_\lambda : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ następująco:

$$\forall_{x\in\mathrm{S}^1}\ g_\lambda(x) := \lambda h_1(x) + (1-\lambda)h_2(x),$$

gdzie h_1 i h_2 są dwoma różnymi homeomorfizmami okręgu, przy czym znów S^1 utożsamiamy z grupą ilorazową $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Niech $h_3 : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ będzie homeomorfizmem o gęstej orbicie dla pewnego punktu na okręgu (a więc dla wszystkich punktów okręgu). Ponadto niech $h_4 : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$ będzie homeomorfizmem o mierze niezmienniczej różnej od miary niezmienniczej dla funkcji h_3. Takie miary istnieją z twierdzenia Kryłowa-Bobolubowa (tw. 2.3), jako że funkcje h_3 i h_4 są ciągłe. Dla każdego $\lambda \in [1/2, 3/4)$ przyjmijmy $g_\lambda := h_3$, a dla każdego $\lambda \in [3/4, 1]$ niech $g_\lambda := h_4$. Oczywiście dla każdego $\lambda \in \Lambda$ funkcje g_λ są homeomorfizmami na S^1.

Rozważmy stochastyczny układ dynamiczny (S^1, G, ν), gdzie G jest półgrupą generowaną przez rodzinę $\Psi = \{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, a ν jest miarą probabilistyczną zadaną przez gęstość p, to znaczy $\nu(\{g_\lambda : \lambda \in [0, t]\}) = \int_0^t p(u)\mathrm{d}u$. Ponadto niech zachodzi $\nu(\{g_\lambda : \lambda \in [1/2, 3/4)\}) > 0$, co zapewni nam, że G działa minimalnie.

Z twierdzenia 3.4 operator Fellera P odpowiadający stochastycznemu układowi dynamicznemu (S^1, G, ν) i będący postaci

$$\forall_{\mu\in\mathcal{M}(\mathrm{S}^1)}\forall_{A\in\mathcal{B}(\mathrm{S}^1)}\ P\mu(A) = \int_0^1 \mu(g_\lambda^{-1}(A))p(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

posiada jedyną miarę niezmienniczą.

Niech $\omega \mapsto (g_\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie niezdegenerowanym spacerem losowym na półgrupie G. Dzięki powyższym założeniom działa on minimalnie na S^1 oraz nie posiada wspólnej miary niezmienniczej na S^1. Niech $\varphi : \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją Lipschitza taką, że $\int_{\mathrm{S}^1} \varphi \mathrm{d}\mu_* = 0$, gdzie μ_* jest jedyną miarą niezmienniczą dla P.

Na mocy twierdzenia 4.9 dla opisanego spaceru losowego zachodzi centralne twierdzenie graniczne, czyli dla dowolnego $x \in \mathrm{S}^1$ istnieje skończone σ^2 postaci

$$\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mu_*}} \left[\frac{\varphi(g_\omega^n(x)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(x))}{\sqrt{n}} \right]^2 .$$

Jeżeli ponadto $\sigma^2 > 0$, to ciąg $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \varphi(g_\omega^k(x)) \right)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega słabo do rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ dla każdego $x \in \mathrm{S}^1$.

Z twierdzenia 4.11 wynika natomiast, że dla opisanego spaceru losowego zachodzi prawo iterowanego logarytmu, czyli dla dowolnego $x \in \mathrm{S}^1$ istnieje $\sigma > 0$ postaci

$$\sigma := \limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(g_\omega^n(x)) + \cdots + \varphi(g_\omega^1(x))}{\sqrt{2n \log\log n}} \quad \mathbb{P}\text{–p. w.}$$

Zatem dla zaprezentowanego przykładu zachodzą twierdzenia graniczne przy niewielkich warunkach nałożonych na generatory g_λ, $\lambda \in \Lambda$.

Bibliografia

[1] C. Aliprantis and K. Border. *Infinite dimensional analysis. A hitch- hiker's guide*, Third edition. Springer, Berlin, 2006.

[2] L. Alsedá, M. Misiurewicz. *Random interval homeomorphisms*. Proceedings of New Trends in Dynamical Systems, Salou, 2012. Publicacions Matemátiques, **58**: 15–36, 2014.

[3] A. Ávila, M. Viana. *Extremal Lyapunov exponents: an invariance principle and applications*. Invent. Math. **181**(1): 115–178, 2010.

[4] R. Bass. *Stochastic Processes*. Cambridge: Cambridge University Press. 2011.

[5] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley-Interscience publication, 1999.

[6] L. Breiman. *The strong law of large numbers for a class of Markov chains*, Ann. Math. Statist., **31**: 801–803, 1960.

[7] F. Browder. *On the iteration of transformations in noncompact minimal dynamical systems*, Proc. Amer. Math. Soc., **9**: 773–780, 1958.

[8] K. Czudek, T. Szarek. *Ergodicity and central limit theorem for random interval homeomorphisms*, Israel J. Math., **239**(1): 75–98, 2020.

[9] K. Czudek, T. Szarek, and H. Wojewódka–Ściążko. *The law of the iterated logarithm for random interval homeomorphisms*, Israel J. Math., **246**: 47–53, 2021.

[10] B. Deroin, V. Kleptsyn, A. Navas. *Sur la dynamique unidimensionnelle en régularité intermédiaire*. Acta Math., **199**(2): 199–262, 2007.

[11] Y. Derrienic, M. Lin. *The central limit theorem for Markov chains started at a point*, Probab. Theory Relat. Fields, **125**: 73–76, 2003.

[12] B. Deroin, V. Kleptsyn, A. Navas. *Sur la dynamique unidimensionnelle en régularité intermédiaire.* Acta Math., **199**(2): 199–262, 2007.

[13] É. Ghys. *Groups acting on the circle*, L'Enseignement Mathématique, **47**: 329–407, 2001.

[14] M.I. Gordin, B.A. Lifšic. *The central limit theorem for stationary Markov processes*, Soviet Math. Dokl., **19**: 392–394, 1978.

[15] A. Gorodetski, V. Kleptsyn. *Synchronization Properties of Random Piecewise Isometries.* Commun. Math. Phys., **345**: 781-–796, 2016.

[16] J. Gulgowski, S. Hille, T. Szarek, M. Ziemlańska. *Central limit theorem for some non–stationary Markov chains*, Studia Math., **246**(2): 109–131, 2019.

[17] A.J. Homburg. *Synchronization in Minimal Iterated Function Systems on Compact Manifolds.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, **49**: 615-–635, 2018.

[18] S. Kakutani. *Ergodic theorems and the Markov process with a stable distribution.* Proc. Imp. Acad. Tokyo, **16**: 49–54, 1940.

[19] Yu.I. Kifer, S.A. Pirogov, *The decomposition of quasi-invariant measures into ergodic components.* Uspekhi Mat. Nauk., **27**:5(167): 239—240, 1972.

[20] C. Kipnis and S.R.S. Varadhan. *Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions.* Commun. Math. Phys., **104**(1):1—19, 1986.

[21] T. Komorowski, C. Landim, S. Olla. *Fluctuations in Markov processes. Time symmetry and martingale approximation*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2012.

[22] S.M. Kozlov. *The averaging method and walks in inhomogeneous environments.* Usp. Mat. Nauk., **40**(2):61—120. 1985.

[23] T. Komorowski, S. Peszat, T. Szarek. *On ergodicity of some Markov processes.* Ann. Probab., **38**: 1401–1443, 2010.

[24] T. Komorowski, A. Walczuk. *Central limit theorem for Markov processes with spectral gap in the Wasserstein metric*, Stochastic Processes and Appl., **122**: 2155–2184, 2012.

[25] A. N. Lagerås, Ö. Stenflo. *Central limit theorem for contractive Markov chains*, Nonlinearity, **18**: 1955–1965, 2005.

[26] A. Lasota, M.C. Mackey. *Cell division and the stability of cellular populations.* Journal of Mathematical Biology, **38**(3): 241–261, 1999.

[27] A. Lasota, T. Szarek. *Lower bound technique in the theory of a stochastric differential equation.* J. Differential Equations, **231**: 513-–533, 2006.

[28] A. Lasota, J.A. Yorke. *Lower bound technique for Markov operators and iterated function systems.* Random Comput. Dynam., **2**: 41—77, 1994.

[29] G. Łuczyńska. *Unique ergodicity for function systems on the circle.* Statistics & Probability Letters, **173**: 109084, 2021.

[30] G. Łuczyńska, T. Szarek. *Limits theorems for random walks on Homeo*(S^1). Journal of Statistical Physics, **187**: 7, 2022.

[31] D. Malicet. *Random walks on Homeo*(S^1). Commun. Math. Phys. **356**: 1083–1116, 2017.

[32] M. Maxwell, M. Woodroofe. *Central limit theorems for additive functionals of Markov chains.* Ann. Probab., **28**(2): 713–724, 2000.

[33] A. Navas. *Groups of circle diffeomorphisms.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 2011.

[34] S.T. Rachev. *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models.* Wiley, Chichester. 1991.

[35] V. Rohlin. *On the fundamental ideas of measure theory.* Amer. Math. Soc. Translation. **1952**. New York: AMS, 1952.

[36] P. Schwartz. *A cocycle theorem with an application to Rosenthal sets*, Proc. Amer. Math. Soc., **124**: 3689–3698, 1996.

[37] T. Szarek. *Invariant measures for nonexpansive Markov operators on Polish spaces.* Dissertationes Mathematicae, **415**: 1–62, 2003.

[38] T. Szarek, A. Zdunik. *Stability of iterated function systems on the circle.* Bull. Lond. Math. Soc., **48**(2): 365–378, 2016.

[39] T. Szarek, A. Zdunik. *The central limit theorem for iterated function systems on the circle.* Moscow Math. J., **21**: 175–190, 2021.

[40] M. Viana, K. Oliveira. *Foundations of Ergodic Theory.* Cambridge: Cambridge University Press. 2016.

[41] D.T.H. Worm. *Semigroups on Spaces of Measures*. PhD thesis, Leiden University, Leiden, The Netherlands, 2010.

[42] O. Zhao, M. Woodroofe. *Law of the iterated logarithm for stationary processes*. Ann. Probab., **36**: 127–142, 2008.