

## Streszczenie

Tematem niniejszej rozprawy jest konstrukcja i analiza metod aproksymacji numerycznej dla równań liniowych oscylujących z różnymi częstotliwościami, na przykładzie równania Kleina-Gordona z masą czasowo i przestrzennie zależną, postaci

$$\partial_t^2 \psi(\mathbf{x}, t) = \Delta \psi(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Szczególnie ciekawym elementem rozważanego równania jest postać funkcji masy  $f(\mathbf{x}, t)$ , która może być charakteryzowana oscylacjami o różnych częstotliwościach, od małych do skrajnie wysokich. Przyjmujemy, że może być ona wyrażona lub przybliżona w następujący sposób

$$f(\mathbf{x}, t) = \alpha(\mathbf{x}, t) + \sum_{|n| \leq N} a_n(\mathbf{x}, t) e^{i\omega_n t}, \quad (2)$$

gdzie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_n \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_{\min} = \min_{n \leq N} |\omega_n| \geq 1$  oraz  $\omega_{\max} = \max_{n \leq N} |\omega_n| < \infty$ . Funkcje  $\alpha(\mathbf{x}, t)$  oraz  $a_n(\mathbf{x}, t)$ ,  $n \leq N$ , nie oscylują w zależności od  $\omega_n$  (tj. ich pochodne czasowe są ograniczone niezależnie od  $\omega_n$ ).

Funkcja  $f(\mathbf{x}, t)$  może przyjmować postać funkcji nieoscylującej (np.  $\forall_n a_n(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ ), funkcji wysokooscylującej (np.  $f(\mathbf{x}, t) = a_2(\mathbf{x}, t) e^{i10^6 t}$ ) lub funkcji mieszanej (np.  $f(\mathbf{x}, t) = \alpha(\mathbf{x}, t) + a_1(\mathbf{x}, t) e^{it} + a_2(\mathbf{x}, t) e^{i10^6 t}$ ). Klasyczne metody numeryczne, oparte na twierdzeniu Taylora oraz kwadraturach, są bardzo efektywne w przypadku zagadnień nieoscylujących. Jednakże, w obliczu oscylacji wymagają one wprowadzenia zależności dla wielkości kroku czasowego  $h < 1/\omega_{\max}$ , co wpływa negatywnie na ich efektywność i koszt obliczeniowy, szczególnie gdy oscylacje są bardzo duże.

Liniowe równanie Kleina-Gordona (1) jest reprezentatywnym modelem, na przykładzie którego zapropojujemy i omówimy różne podejścia analizy obliczeniowej problemu oscylacji w komponencie zewnętrznym  $f(\mathbf{x}, t)$ , w tym rozwinięcie asymptotyczne, formułę Duhamela, rozwinięcie Magnusa oraz dekompozycję pola wektorowego.

Motywacją naszych badań nad równaniem (1) była praca [Bader et al., 2019], w której po raz pierwszy zaprezentowano metody obliczeniowe dla takiego równania. Proponowane tam schematy numeryczne sprawdzają się tylko w przypadkach nieoscylującej funkcji  $f(\mathbf{x}, t)$ . Zaciekawieni problemami wynikającymi z wysokich oscylacji, zaproponowaliśmy trzy inne podejścia numeryczne w obecności różnych oscylacji w równaniu Kleina-Gordona (1).

W pierwszej z prezentowanych metod zakładamy, że rozwiązanie równania Kleina-Gordona (1) przyjmuje formę nieskończonego zmodyfikowanego szeregu Fouriera. W wyniku otrzymujemy numeryczno-asymptotyczną metodę rozwiązywania równania Kleina-Gordona, której dokładność rośnie z częstotliwością oscylacji  $\omega_n$ . Metoda skonstruowana została z myślą wyłącznie o wysokich częstotliwościach funkcji  $f(\mathbf{x}, t)$

Druga z prezentowanych w rozprawie metod działa jednakowo dobrze, z trzecim rzędem zbieżności, w obliczu każdego rodzaju oscylacji. Ponadto, stała błędów tej metody nie rośnie wraz ze wzrostem  $\omega_n$ . Cel ten udało się osiągnąć dzięki przestawieniu równania Kleina-Gordona (1) w postaci niejednorodnego układu równań różniczkowych zwyczajnych oraz zastosowaniu do niego dobrze znanej metody niezmiennictwa stałej, znanej również jako reguła Duhamela. Ponadto, zastosowanie metody Filona do aproksymacji wysokooscylujących całek, które wchodzi w skład schematu numerycznego, pozwala na uniezależnienie kroku czasowego  $h$  od wielkości oscylacji  $\omega_n$ . Oprócz zaprezentowania metody, przedstawimy szczegółowy dowód zbieżności i jej globalnego rzędu dokładności oraz omówimy strukturę błędów metody i wyjaśnimy, dlaczego nie mają na nią wpływu możliwie ekstremalnie wysokie oscylacje.

W trzeciej prezentowanej metodzie numerycznej wykorzystujemy rozwinięcie Magnusa oraz różne techniki dekompozycji pola wektorowego, które są dobrze znanymi metodami aproksymacji rozwiązań równań ewolucyjnych. W przeciwieństwie do metody opartej na regule Duhamela, nie udowodniamy globalnego rzędu zbieżności, ale opierając się na zbieżności wykorzystywanych narzędzi, skoncentrujemy się na wyznaczeniu dominującego czynnika błędów, który odpowiada lokalnemu błędowi przybliżenia. Pokażemy, że

lokalna dokładność metody opisana jest funkcjami

$$\mathcal{O}(h^5 + \min\{h^3, \frac{h^2}{\omega_{\min}}, h^5\omega_{\max}^2\}) \quad \text{dla } \alpha(\mathbf{x}, t) \neq 0$$

oraz

$$\mathcal{O}(\min\{h^3, \frac{h^2}{\omega_{\min}}, h^5\omega_{\max}^2\}) \quad \text{dla } \alpha(\mathbf{x}, t) \equiv 0,$$

które zależą od relacji kroku czasowego  $h$ ,  $\omega_{\min}$  i  $\omega_{\max}$ . Metoda ta działa efektywnie dla wszystkich wielkości częstotliwości oscylacji w funkcji  $f(\mathbf{x}, t)$  i cechuje się najwyższą dokładnością z pośród zaproponowanych dotychczas metod dla liniowego równania Kleina-Gordona z masą czasowo- i przestrzenno-zależną.

Metody opisane są w oddzielnych rozdziałach, a każdy rozdział kończy się zaprezentowaniem wyników symulacji numerycznych i porównaniem do dotychczas opisanych metod.